Zur

Transformation der Thetafunktionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktor-Würde

an der

Universität Rostock

von

Heinrich Möller
aus Schwerin.

Rostock.

Universitäts-Buchdruckerei von Adler's Erben.

1887.

Referent:
Herr Professor Dr. **Krause.**

Die vorliegende Arbeit behandelt die Transformation der Thetafunktionen mit Hülfe neuer Additionstheoreme, die von Herrn Professor Dr. Krause aufgestellt sind. In den Berichten der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften ist ein Additionstheorem veröffentlicht, dessen Existenz für die Transformationstheorie von weittragender Bedeutung ist, wie im Verlaufe der Arbeit gezeigt wird. — Als Aufgabe des Transformationsproblems stellen wir dabei die folgende hin: Es sollen die Potenzen und Produkte n^{ter} Ordnung der ursprünglichen Thetafunktionen als lineare Funktionen der Grössen

$$e^{\frac{\pi i \varkappa}{n}(2nv + \varkappa\tau)} \cdot \vartheta_3(nv + \varkappa\tau, n\tau)$$

dargestellt werden, so zwar, dass die Coefficienten sich durch dieselben Grössen und die ursprünglichen Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente ausdrücken lassen. Setzt man dann in diesen Formeln das Argument gleich Null, so ergeben sich Thetarelationen der Art, wie sie in neuester Zeit in mannigfachen Arbeiten behandelt worden sind, aber teilweise bedeutend allgemeinerer Natur, als alle bisher aufgestellten. Der Gang der Untersuchungen soll folgender sein:

Im ersten Abschnitt werden unter Anwendung des vorhin erwähnten Additionstheoremes die Transformationen 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Grades gelöst, wie dieselben schon von Herrn Rohde und teilweise von Herrn Professor Schröter gefunden sind. Im Vergleich zu den meist sehr umfangreichen Multiplikationen, durch die Herr Rohde zum Ziele kommt, ergeben sich hier die Resultate in weit einfacherer und übersichtlicherer Weise.

Der zweite Abschnitt der Arbeit zeigt, dass das Additionstheorem noch höhere Transformationsgrade beherrscht, als die vorhin angegebenen. Zunächst wird nachgewiesen, dass alle Grade von der Form $n = 2^r$ sofort damit ihre Lösung finden. Ferner sind die Transformationsgrade $n = 2^r + 1$ und $n = 2^r + 2$ einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Auch hier ist das Additionstheorem mit Erfolg anwendbar, allerdings nur bis zu einer gewissen

Grenze. Darüber hinaus sind einige Faktoren mit den Nullwerten der Argumente nicht in einfacher Weise durch solche mit dem einfachen Parameter ausdrückbar; aber selbst hier herrscht eine übersehbare Gesetzmässigkeit.

Im dritten Abschnitt endlich werden noch zwei andere von Herrn Professor Dr. Krause aufgestellte Additionstheoreme auf ihre Bedeutung untersucht (cf. Math. Annalen, Bd. 27). Es erfahren wiederum die Transformationen $n = 2^r$, $2^r + 1$, $2^r + 2$ eine eingehende Behandlung in der Weise wie vorhin. Es ist namentlich das zweite Additionstheorem (pag. 424 und 425) weitreichender als das in den beiden ersten Abschnitten erwähnte. Man kann dasselbe vorzugsweise verwenden, um auf der rechten Seite die Mannigfaltigkeit des Moduls zu verringern.

Schliesslich wird noch die Bedeutung des anderen Additionstheorems für die Transformationstheorie auseinandergesetzt, wobei das Augenmerk lediglich darauf gerichtet ist, Relationen zwischen Thetafunktionen zu erhalten, die den Modul τ und $n\tau$ besitzen.

Hinsichtlich der in der Arbeit benutzten Litteratur wird verwiesen auf

M. Krause, Zur Transformation der elliptischen Funktionen. Berichte der math.-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1886, pag. 39.

M. Krause, Ueber Fouriersche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Mathematische Annalen Band 27, pag. 419.

Schröter, Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten und die Teilung dieser Funktionen. Habilitationsschrift, Breslau 1855.

Schröter, De aequationibus modularibus. Dissertation 1854.

Fricke, Ueber Systeme elliptischer Modulfunktionen von niederer Stufenzahl. Dissertation.

Rohde, Zur Transformation der Thetafunktionen. Dissertation. Greifswald 1886.

Weber, Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Acta mathematica, 1885.

Voss, Theorie der Thetafunktionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Dissertation 1886. Greifswald.

Das Thema der Arbeit stellte Herr Professor Dr. Krause mir im Anfange des Sommersemesters 1886, und die Bearbeitung erfolgte im mathematischen Seminar. Bevor ich mich zur Ausführung wende, sei es mir gestattet, Herrn Professor Dr. Krause für den so oft im Verlaufe der Untersuchungen in freundlichster Weise erteilten Rat meinen ehrerbietigsten Dank abzustatten.

Abschnitt I.

Aufstellung eines allgemeinen Additionstheoremes und Lösung der Transformationen 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Grades.

§ 1.

Der Beweis für die Richtigkeit des Additionstheoremes.

Das Additionstheorem lautet

$$\prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 (v_\varepsilon , \tau) = \sum_{k} \prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 (v_\varepsilon' + \varkappa_\varepsilon \tau, m_\varepsilon \tau)\, e^{\frac{\pi i \varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}(2v_\varepsilon' + \varkappa_\varepsilon \tau)}\ *)$$

Bedeuten $v_1, v_2 \ldots . v_n$. n beliebige von einander unabhängige Argumente, so ist das Produkt

$$P = \prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 (v_\varepsilon, \tau)$$

eine Thetafunktion erster Ordnung mit der Charakteristik Null, da es den Gleichungen Genüge leistet:

$$f(v_\varepsilon + 1) = f(v_\varepsilon)$$
$$f(v_\varepsilon + \tau) = f(v_\varepsilon)\, e^{-\pi i (2v_\varepsilon + \tau)}\ **)$$

P genügt auch der Bedingung

$$1) \quad \sum_{\varepsilon=1}^{n} \frac{\delta^2 P}{\delta v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\delta P}{\delta \tau},$$

denn differentiirt man den Ausdruck

$$P = \prod_{\varepsilon=1}^{n} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n v_\varepsilon} \right)$$

zweimal nach v_ε und einmal nach τ, so ergiebt sich durch Division unmittelbar die Beziehung unter 1). Wir definiren nun

$$\vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i m_\varepsilon \tau \left(n + \frac{\varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}\right)^2 + 2\pi i \left(n + \frac{\varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}\right) v_\varepsilon'}$$

Es möge hier im Voraus eine Bemerkung gemacht werden über die Werte, die die Grössen $\varkappa_\varepsilon$ annehmen können. Für letztere sind zunächst nur ganzzahlige Werthe zulässig. Sollen jedoch die vorkommenden Thetafunktionen in andere mit kleinerem Modul übergeführt werden, so ändert sich dabei der Wert von $\varkappa_\varepsilon$ und zwar tritt derselbe in der Form $\frac{r \,.\, \varkappa_\varepsilon}{2}$ auf, wo r eine ganze

---

*) M. Krause, Zur Transformation der ellipt. Funktionen. Berichte der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1886.

**) Weber, Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Acta mathematica. 1885.

Zahl bedeutet. Die letzte Definitionsgleichung schreiben wir folgendermassen

$$\vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v_\varepsilon', m_\varepsilon\tau) = \vartheta_3 (v_\varepsilon' + \varkappa_\varepsilon\tau, m_\varepsilon\tau)\ e^{\frac{\pi i \varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}(2v_\varepsilon' + \varkappa_\varepsilon\tau)}$$

Darin soll sein

$$v_\varepsilon' = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \ldots - \ldots + a_{\varepsilon n} v_n;\ \varepsilon = 1, 2 \ldots n.$$

Es ist zu untersuchen, ob sich nicht ein Aggregat von Gliedern bilden lässt von der Form

$$\prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v_\varepsilon', m_\varepsilon\tau)$$

das, als Funktion von v_ε aufgefasst, eine Thetafunktion erster Ordnung mit der Charakteristik Null ist. Es sei

$$P_1 = \sum\nolimits^{\varkappa} \prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v_\varepsilon', m_\varepsilon\tau)$$

und es sollen die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen

$$2)\quad P_1 (v_\varepsilon + 1) = P_1 (v_\varepsilon)$$
$$3)\quad P_1 (v_\varepsilon + \tau) = P_1 (v_\varepsilon)\ e^{-\pi i (2v_\varepsilon + \tau)}$$

ist. Sieht man zunächst die Summe der Produkte (ad 3) als Funktion von v_1 an und vermehrt zugleich v_1 um τ, so gehen die Grössen $v_1', v_2' \ldots v_n'$ der Reihe nach über in

$$v_1' + a_{11}\tau;\ v_2' + a_{21}\tau;\ \ldots\ldots v_n' + a_{n_1}\tau.$$

Es ist also

$$P_1 = \sum_{\varkappa} \vartheta_3 \mid \varkappa_1 \mid (v_1' + a_{11}\tau, m_1\tau) \ldots \vartheta_3 \mid \varkappa_n \mid (v_n' + a_{n_1}\tau, m_n\tau).$$

Für den weiteren Nachweis entwickeln wir uns die Formeln

$$4)\quad \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v + m\tau, m\tau) = e^{-\pi i (2v + m\tau)}\ \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v, m\tau)$$

$$5)\quad \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v + r\tau, m\tau) = e^{-\frac{\pi i}{m}(r^2\tau + 2rv)}\ \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon + r \mid (v, m\tau)$$

Unsere Summe von Produkten geht demnach über in

$$P_1 (v_\varepsilon + \tau, m_\varepsilon\tau) = \sum \prod \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon + a_{n_1} \mid (v_\varepsilon', m_\varepsilon\tau)\ e^{-\pi i \omega}$$

wobei ω den Wert hat

$$\omega = \tau \left(\frac{a_{11}^2}{m_1} + \ldots + \frac{a_{n_1}^2}{m_n}\right) + 2 \left(v_1' \frac{a_{11}}{m_1} + \ldots + v_n' \frac{a_{n_1}}{m_n}\right).$$

Führt man statt der Argumente $v_1', v_2' \ldots v_n'$ die Grössen $v_1, v_2 \ldots v_n$ ein, so wird

$$\omega = \tau \left(\frac{a_{11}^2}{m_1} + \ldots + \frac{a_{n_1}^2}{m_{22}}\right) + 2 \left\{ v_1 \left(\frac{a_{11}^2}{m_1} + \ldots + \frac{a_{n_1}^2}{m_n}\right) + v_2 \left(\frac{a_{11} \cdot a_{12}}{m_1} + \frac{a_{21} \cdot a_{22}}{m_2} + \ldots\right) + \ldots\ldots \right\}.$$

Soll nun

$$e^{-\pi i \omega} = e^{-\pi i (2v + \tau)}$$

sein, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{a_{11}^2}{m_1} + \frac{a_{21}^2}{m_2} + \ldots + \frac{a_{n_1}^2}{m_n} = 1.$$

$$\frac{a_{11} \cdot a_{12}}{m_1} + \frac{a_{21} \cdot a_{22}}{m_2} + \ldots + \frac{a_{n_1} \cdot a_{n_2}}{m_n} = 0.$$

. . . . . .

Sieht man P_1 auch als Funktion von v_2, $v_3 \ldots v_n$ an, so ergeben sich ähnliche Bedingungen. Wir fassen alle zusammen in

$$\frac{a_{1\varkappa}^2}{m_1} + \frac{a_{2\varkappa}^2}{m_2} + \frac{a_{3\varkappa}^2}{m_3} + \ldots + \frac{a_{n\varkappa}^2}{m_n} = 1.$$

$$\frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1\varkappa}}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon} \cdot a_{2\varkappa}}{m_2} + \ldots + \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{n\varkappa}}{m_n} = 0. \quad \varepsilon \gtrless \varkappa.$$

Diese Gleichungen können auch geschrieben werden

$$a_{\varepsilon_1}^2 + a_{\varepsilon_2}^2 + \ldots + a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon.$$

$$a_{\varepsilon_1} \cdot a_{\varkappa_1} + a_{\varepsilon_2} \cdot a_{\varkappa_2} + \ldots + a_{\varepsilon n} \cdot a_{\varkappa n} = 0.$$

Somit besteht also die Gleichung 3). Es erübrigt noch, den Nachweis für 2) zu liefern. Vermehrt man v_1 um 1, d. h. v_1' um a_{11}; v_2' um a_{21} u. s. f., so folgt

$$P_1 (v_\varepsilon + 1) = \sum \prod \vartheta_3 \mid \varkappa_\varepsilon \mid (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{\varkappa_1 \cdot a_{11}}{m_1} + \frac{\varkappa_2 \cdot a_{21}}{m_2} + \ldots \right)}$$

Es muss demnach der Ausdruck

$$\frac{\varkappa_1 \cdot a_{11}}{m_1} + \frac{\varkappa_2 \cdot a_{21}}{m_2} + \ldots \frac{\varkappa_n \cdot a_{n_1}}{m_n}$$

eine ganze Zahl sein, d. h.

$$e^{2\pi i \left(\varkappa_1 \frac{a_{11}}{m_1} + \varkappa_2 \cdot \frac{a_{21}}{m_2} + \ldots \right)} = 1$$

Nimmt man die analogen Veränderungen mit den Grössen v_2, $v_3 \ldots$ vor, so muss

$$\frac{\varkappa_1 \cdot a_{1\varepsilon}}{m_1} + \frac{\varkappa_2 \cdot a_{2\varepsilon}}{m_2} + \ldots + \frac{\varkappa_n \cdot a_{n\varepsilon}}{m_n}$$

eine ganze Zahl sein, eine Bedingung, die von selbst erfüllt ist, wenn die Grössen $\varkappa$ den Congruenzen gemäss bestimmt werden

$$\varkappa_1 \equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1n} r_n \bmod m_1$$

. . . . . .

$$\varkappa_n \equiv a_{n_1} r_1 + a_{n_2} \cdot r_2 + \ldots + a_{nn} \cdot r_n \bmod m_n$$

worin die Grössen $r_1, r_2 \ldots r_n$ willkürliche ganze Zahlen bedeuten. Der

Beweis folgt leicht, wenn wir in P_1 die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ gleich Null setzen und v_ε um r_ε vermehren. Dann geht v_1' über in

$$v_1' + (a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1n} r_n)$$

Der Ausdruck

$$a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1n} r_n$$

würde die allgemeinste Charakteristik des ersten Faktors sein, also wäre

$$\varkappa_1 = a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1n} r_n$$

Dabei muss $\varkappa_1$ nach dem Modul m_1 genommen werden, weil bei einer Vermehrung von $\varkappa_1$ um s_1 Vielfache von m_1 dieselbe Funktion erhalten würde, also

$$\varkappa_1 \equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1n} r_n \; mod \; m_1 \text{ u. s. f.}$$

Somit ist P_1 eine Thetafunktion erster Ordnung mit der Charakteristik Null. Daraus folgt, das P und P_1 sich nur um eine Constante, deren Wert gleich 1 ist, unterscheiden können, d. h. es existirt das Additionstheorem

$$6) \quad \prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 (v_\varepsilon, \tau) = \sum_{\varkappa} \prod_{\varepsilon=1}^{n} \vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau).$$

Damit nur die Argumente nv und Null auftreten, wenn $v_1 = v_2 = \ldots v_n$ gesetzt wird, sollen für die Grössen a noch die Festsetzungen getroffen werden:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} = n = m_1.$$
$$a_{r1} + a_{r2} + a_{r3} + \ldots + a_{rn} = 0; \quad r > 1.$$

Der Uebergang der ϑ_3 Funktion unter 6) in die drei anderen geschieht leicht unter Zuhülfenahme von Gleichung 5)

$$\vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, \left(v_\varepsilon' + \frac{1}{2}, m_\varepsilon \tau\right) = \vartheta_0 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) \; e^{\pi i \frac{\varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}} \; ^{*)}$$

$$\text{oder } \vartheta_0 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) = \vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, \left(v_\varepsilon' + \frac{1}{2}, m_\varepsilon \tau\right) e^{-\pi i \frac{\varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}}$$

$$\vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, \left(v_\varepsilon' + \frac{\tau}{2}, m_\varepsilon \tau\right) = \vartheta_2 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) \; e^{-\frac{\pi i}{2 m_\varepsilon}\left(2 v_\varepsilon' + \frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_3 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, \left(v_\varepsilon' + \frac{\tau+1}{2}, m_\varepsilon \tau\right) = i \, \vartheta_1 \,|\, \varkappa_\varepsilon \,|\, (v_\varepsilon', m_\varepsilon \tau) \; e^{-\frac{\pi i}{2 m_\varepsilon}\left(2 v_\varepsilon' + \frac{\tau}{2}\right)} \; e^{\frac{\pi i \varkappa_\varepsilon}{m_\varepsilon}}.$$

Mit Hülfe unseres Additionstheorems wollen wir nun die schon bekannten Transformationen 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Grades lösen.**)

---

*) Dissertation von R. Voss.

**) Vgl. dazu die Lehrbücher von Briot und Bouquet, Schellbach u. s. f. und die Dissertation von Rohde.

§ 2.

Die Transformationen 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Grades.

1) $n = 2$. Für diesen Fall ist

$$a_{11} = 1;\ a_{12} = 1; \qquad m_1 = 2.$$
$$a_{21} = 1;\ a_{22} = -1;\ m_2 = 2$$

und wir erhalten die Gleichung

$$\vartheta_3(v_1, \tau) \cdot \vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3 \mid \varkappa_1 \mid (v_1 + v_2, 2\tau) \cdot \vartheta_3 \mid \varkappa_2 \mid (v_1 - v_2, 2\tau).$$

Die Grössen $\varkappa$ leisten der Congruenz Genüge

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 \equiv \text{mod } 2.$$

d. h. dieselben nehmen die Werte an

$$\varkappa_1 = 1;\ \varkappa_2 = 1. \quad \varkappa_1 = 0;\ \varkappa_2 = 0.$$

Setzt man $v_1 = v_2$, so ergiebt sich die Formel

$$\vartheta_3^2(v, \tau) = \vartheta_3(2v, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 2\tau) + \vartheta_2(2v, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 2\tau)$$

Durch Substitution halber Perioden, oder durch Vermehrung von v_1 und v_2 resp. um $-\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}$ ergeben sich hieraus drei weitere Formeln

I.
$$\vartheta_0^2(v, \tau) = \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(2v, 2\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(2v, 2\tau)$$
$$\vartheta_2^2(v, \tau) = \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(2v, 2\tau) + \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(2v, 2\tau)$$
$$-\vartheta_1^2(v, \tau) = \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(2v, 2\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(2v, 2\tau).$$

Herr Rohde und andere haben noch zwei weitere Formelsysteme erwähnt, die sich mit unserem Additionstheorem nicht ergeben. Wir wollen zwei Relationen davon aufnehmen, da wir dieselben später verwenden.

II.
$$\vartheta_3^2(v, \tau) = \frac{1}{2}\vartheta_3\left(0, \frac{\tau}{2}\right) \cdot \vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\vartheta_0\left(0, \frac{\tau}{2}\right) \cdot \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right)$$
$$\vartheta_3^2(v, \tau) = \frac{1}{2}\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+1}{2}\right) \cdot \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \vartheta_0\left(0, \frac{\tau+1}{2}\right) \cdot \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+1}{2}\right).$$

Nachdem wir so die Potenzen der 2ten Ordnung ausgedrückt, wollen wir noch die Produktentwickelung in derselben Weise durchführen. Durch Vermehrung des Argumentes v_2 um $-\frac{1}{2}$ ergiebt sich

$$\vartheta_3(v_1, \tau) \cdot \vartheta_0(v_2, \tau) = \sum \vartheta_0 \mid \varkappa_1 \mid (v_1 + v_2, 2\tau) \cdot \vartheta_0 \mid \varkappa_2 \mid (v_1 - v_2, 2\tau)$$

Setzen wir $v_1 = v_2$, so wird der eine Summand gleich Null und es resultirt die Formel

III.
$$\vartheta_3(v, \tau) \cdot \vartheta_0(v, \tau) = \vartheta_0(2v, 2\tau) \cdot \vartheta_0(0, 2\tau)$$

und
$$\vartheta_2(v, \tau) \cdot \vartheta_1(v, \tau) = \vartheta_1(2v, 2\tau) \cdot \vartheta_0(0, 2\tau)$$

Ein anderes Produkt erhalten wir, wenn v_1 um $\frac{\tau}{2}$ vermehrt wird:

$$-\frac{1}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)\pi i$$

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,.\,\vartheta_2(v_2,\tau)\;e$$

$$=\sum \vartheta_3\,|\,\varkappa_1\,|\left(v_1+v_2+\frac{\tau}{2},\,2\tau\right).\,\vartheta_3\,|\,\varkappa_2\,|\left(v_1-v_2+\frac{\tau}{2},\,2\tau\right)$$

Mit Hülfe einer bereits früher erwähnten Formel schreiben wir

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,.\,\vartheta_2(v_2,\tau)=\sum \vartheta_3\left|\,\varkappa_1+\frac{1}{2}\,\right|(v_1+v_2,2\tau)\,.\,\vartheta_3\left|\,\varkappa_2+\frac{1}{2}\,\right|(v_1-v_2,2\tau).$$

Setzen wir $v_1=v_2$, so ergiebt sich

$$\vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau)=\vartheta_3\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v,2\tau)\,.\,\vartheta_3\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(0,2\tau)+\vartheta_2\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v,2\tau)\,.\,\vartheta_2\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(0,2\tau)$$

Die Ausdrücke $\vartheta_3\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v_1\;2\tau)$ und $\vartheta_2\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v_1\;2\tau)$ wollen wir in solche mit dem Parameter $\frac{\tau}{2}$ überführen und gehen dazu aus von den Gleichungen

$$\vartheta_3(2v,2\tau)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{2}\right)+\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{2}\right)\right)$$

$$\text{und}\quad \vartheta_2(2v,2\tau)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{2}\right)-\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{2}\right)\right).$$

Vermehren wir v um $\frac{\tau}{4}$, so wird

$$\vartheta_3\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v,2\tau)=\frac{1}{2}\left[\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{2}\right)+i\,\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

Vermehrt man dagegen v um $\frac{3\tau}{2}$, so folgt

$$\vartheta_2\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(2v,2\tau)=\frac{1}{2}\left[\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{2}\right)-i\,\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

Für die Nullwerte der Argumente ist demnach

$$\vartheta_3\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(0,2\tau)=\vartheta_2\left|\,\frac{1}{2}\,\right|(0,2\tau)=\frac{1}{2}\,\vartheta_2\left(0,\frac{\tau}{2}\right).$$

Das gesuchte Produkt hat also folgenden Wert

$$\text{IV.}\quad \vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau)=\frac{1}{2}\,\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{2}\right).\,\vartheta_2\left(0,\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\vartheta_0(v,\tau)\,.\,\vartheta_1(v,\tau)=\frac{1}{2}\,\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{2}\right).\,\vartheta_2\left(0,\frac{\tau}{2}\right).$$

Es werde endlich v_2 um $\frac{\tau}{2}$, v_1 um $-\frac{1}{2}$ vermehrt, so ist

$$\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_2,\tau)\,e^{-\frac{1}{2}\left(2v_1+\frac{\tau}{2}\right)\pi i}$$
$$=\sum \vartheta_3 \mid \varkappa_1 \mid \left(v_1+v_2+\frac{\tau+1}{2},\,2\tau\right).\vartheta_3 \mid \varkappa_2 \mid \left(v_1-v_2+\frac{\tau-1}{2},\,2\tau\right)$$

Für $v_1 = v_2$ geht die Formel über in

V. $$\vartheta_2(v,\tau).\vartheta_0(v,\tau)-\vartheta_0\left|\frac{1}{2}\right|(0,2\tau)\left\{\vartheta_0\left|\frac{1}{2}\right|(2v,2\tau)+\vartheta_0\left|\frac{3}{2}\right|(2v,2\tau)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right).\vartheta_2\left(v_1\frac{\tau+1}{2}\right)$$

und $$\vartheta_1(v,\tau).\vartheta_3(v,\tau)-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right).\vartheta_1\left(v,\frac{\tau+1}{2}\right).$$

Somit ist mit dem vorliegenden Additionstheorem die Transformation 2ten Grades vollständig gelöst.

2) $n = 3$; Für diesen Fall lautet das Schema der Grössen a

$$a_{11}=1;\ a_{12}=1;\ a_{13}=1;\ m_1=3.$$
$$a_{21}=2;\ a_{22}=-1;\ a_{23}=-1;\ m_2=6.$$
$$a_{31}=0;\ a_{32}=+1;\ a_{33}=-1;\ m_3=2.$$

Danach ergiebt sich die Formel

$$\vartheta_3(v_1,\tau).\vartheta_3(v_2,\tau).\vartheta_3(v_3,\tau)$$
$$=\sum \vartheta_3 \mid \varkappa_1 \mid (v_1+v_2+v_3,3\tau).\vartheta_3 \mid \varkappa_2 \mid (2v_1-v_2-v_3,6\tau).\vartheta_3 \mid \varkappa_3 \mid (v_2-v_3,2\tau)$$

und für $v_1 = v_2 = v_3$

$$\vartheta_3^3(v,\tau)=\sum \vartheta_3 \mid \varkappa_1 \mid (3v,3\tau).\vartheta_3 \mid \varkappa_2 \mid (0,6\tau).\vartheta_3 \mid \varkappa_3 \mid (0,2\tau).$$

Die Congruenzen fassen wir zusammen zu

$$\varkappa_1+\varkappa_2\equiv 0 \bmod 3;\ \varkappa_2+\varkappa_3\equiv 0 \bmod 2.$$

Diesen genügen die Grössen

$\varkappa_1$	0	3	2	5	1	4
$\varkappa_2$	0	3	4	1	2	5
$\varkappa_3$	0	1	0	1	0	1

durch deren Substituirung sich ergiebt

$$\vartheta_3^3(v,\tau)=\vartheta_3(3v,3\tau)\left(\vartheta_3(0,2\tau).\vartheta_3(0,6\tau)+\vartheta_2(0,2\tau).\vartheta_2(0,6\tau)\right)$$
$$+\left(\vartheta_3 \mid 1 \mid (3v,3\tau)+\vartheta_3 \mid 2 \mid (3v,3\tau)\right)$$
$$\left(\vartheta_3(0,2\tau).\vartheta_3 \mid 2 \mid (0,6\tau)+\vartheta_2(0,2\tau).\vartheta_2 \mid 2 \mid (0,6\tau)\right)$$

Der Ausdruck $\left(\vartheta_3\ \ 1\mid(3v,3\tau)+\vartheta_3\ \ 2\mid(3v,3\tau)\right)$ lässt sich nach der in der Rohdeschen Arbeit pag. 29 angegebenen Formel berechnen. Es ist

A) $$\vartheta_3\mid\mu\mid(pv,p\tau)+\vartheta_3\mid p-\mu\mid(pv,p\tau)=\frac{1}{p}\sum_{\rho=0}^{p-1}\alpha^{\rho\mu^2}\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+2^p\rho}{p}\right)$$

worin μ die Werte $1, 2, \ldots p-1$ annehmen kann, α eine p^{te} Einheitswurzel und p eine ungerade Primzahl ist. Für $\mu=1$ erhalten wir

$$\vartheta_3\mid 1\mid(3v,3\tau)+\vartheta_3\mid 2\mid(3v,3\tau)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)\right)$$

Wenn wir den Jacobischen Satz*) anwenden

$$\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)+\alpha\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)=0$$

$$\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)+\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)-3\,\vartheta_3(3v,3\tau)=0$$

und dazu addiren

$$\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)$$

so folgt

B. $$\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)$$
$$=-3\left(\vartheta_3(3v,3\tau)-\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)\right)$$

und $$\vartheta_3\mid 1\mid(3v,3\tau)+\vartheta_3\mid 2\mid(3v,3\tau)=\left\{\vartheta_3(3v,3\tau)-\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)\right\}$$

Setzen wir in Formel A) $\tau=(p-1)\tau$ und v gleich Null, so können wir auch $\vartheta_3\mid 2\mid(0,6\tau)$ ausdrücken. Für $\mu=1$ resultirt

$$\vartheta_3\ \ 2\mid(0,6\tau)=\frac{1}{6}\left(\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\cdot\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha\cdot\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)$$

Auf dieselbe Art erhalten wir:

$$\vartheta_2\ \ 2\mid(0,6\tau)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)$$

*) cf. Dissertation von Rohde pag. 39.

Zur Abkürzung sollen die Bezeichnungen (nach Herrn Rohde) gelten:

$$\vartheta_\alpha\,(0_1\,3\tau) = \Theta_\alpha;\ \vartheta_\alpha\left(0_1\,\frac{\tau}{3}\right) = \Theta_\alpha^1;\ \vartheta_\alpha\,(0,\,\tau) = \vartheta_\alpha.$$

Wir erhalten demnach die Schrötersche Formel:

$$\vartheta_3{}^3\,(v,\,\tau) = c_0\,\vartheta_3\,(3v,\,3\tau) + c_1\,.\,\vartheta_3\left(v,\,\frac{\tau}{3}\right)$$

worin die Konstanten die Werte haben

$$c_0 = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{\vartheta_3{}^2+\vartheta_0{}^2}\left(3\sqrt{\Theta_3{}^2+\Theta_0{}^2}\quad\sqrt{\Theta_3{}^{12}+\Theta_0{}^{12}}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\vartheta_3{}^2-\vartheta_0{}^2}\left(3\sqrt{\Theta_3{}^2-\Theta_0{}^2}-\sqrt{\Theta_3{}^{12}-\Theta_0{}^{12}}\right)\right\}.$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}\left\{\sqrt{\vartheta_3{}^2+\vartheta_0{}^2}\left(\quad\sqrt{\Theta_3{}^2+\Theta_0{}^2}\quad\sqrt{\Theta_3{}^{12}+\Theta_0{}^{12}}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\vartheta_3{}^2-\vartheta_0{}^2}\left(\quad\sqrt{\Theta_3{}^2-\Theta_0{}^2}-\sqrt{\Theta_3{}^{12}-\Theta_0{}^{12}}\right)\right\}.$$

Dazu ergeben sich noch drei weitere Formeln, entweder durch Substitutionen halber Perioden, oder durch Vermehrung der Argumente v_1, v_2 und v_3 resp. um $-\frac{1}{2}$, $\frac{\tau-1}{2}$ und $\frac{\tau}{2}$.

I. $$\vartheta_0{}^3\,(v,\,\tau) = c_0\,\vartheta_0\,(3v,\,3\tau) + c_1\,\vartheta_0\left(v,\,\frac{\tau}{3}\right)$$

$$-\vartheta_1{}^3\,(v,\,\tau) = c_0\,\vartheta_1\,(3v,\,3\tau) - c_1\,\vartheta_1\left(v,\,\frac{\tau}{3}\right)$$

$$\vartheta_2{}^3\,(v,\,\tau) = c_0\,\vartheta_2\,(3v,\,3\tau) + c_1\,\vartheta_2\left(v,\,\frac{\tau}{3}\right)$$

Die übrigen von Herrn Rohde angegebenen Konstanten ergeben sich nicht mit dem Additionstheorem. Die Entwickelung der Potenzen 3ten Grades ist somit wirklich durchgeführt. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch die Produkte bestimmen. Indem wir v_1 und v_2 um $-\frac{1}{2}$ vermehren, erhalten wir das Produkt

$$\vartheta_3\,(v_1,\tau)\,.\,\vartheta_0\,(v_2,\tau)\,.\,\vartheta_0\,(v_3,\tau)\,e^{\pi i\left(\frac{2}{3}\varkappa_1+\frac{1}{6}\varkappa_2+\frac{1}{2}\varkappa_3\right)}$$
$$=\sum\vartheta_3\,|\,\varkappa_1\,|\,(v_1+v_2+v_3,\,3\tau)\,.\,\vartheta_0\,|\,\varkappa_2\,|\,(2v_1-v_2-v_3,\,6\tau)\,.\,\vartheta_0\,|\,\varkappa_3\,|\,(v_2-v_3,\,2\tau).$$

Wir leiten aus der Formel (Arbeit von Rohde pag. 29)

$$e^{-\pi i\mu}\,\vartheta_0\,|\,\mu\,|\,(pv,\,p\tau) + e^{\pi i\mu}\,\vartheta_0\,|\,p-\mu\,|\,(pv,\,p\varepsilon) = \frac{1}{p}\sum\alpha^{-\rho\mu^2}\,\vartheta_0\left(v,\,\frac{\tau+2^p\rho}{p}\right)$$

eine andere her, indem wir $\tau = (p-1)\,\tau$ und v gleich Null setzen.

Darin wird für $\mu = 1$

$$\vartheta_0 \mid 2 \mid (0, 6\tau) = -\frac{1}{6}\left(\vartheta_0\left(0, \frac{2\tau}{3}\right) + \alpha^2\,\vartheta_0\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right) + \alpha\,\vartheta_0\left(0, \frac{2\tau+16}{3}\right)\right)$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\vartheta_0\left(0, 6\tau\right) - \vartheta_0\left(0, \frac{2\tau}{3}\right)\right).$$

Setzen wir in der Produktentwickelung $v_1 = v_2 = v_3$ und berücksichtigen, dass

$$\vartheta_0\,(0, 6\tau) = \sqrt{\Theta_3\,\Theta_0}\;;\; \vartheta_0\,(0, 2\tau) = \sqrt{\vartheta_3\,\vartheta_0}.$$

ist, so lautet die endgültige Formel

$$\text{II.}\quad \vartheta_0^{\,2}\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_3\,(v, \tau) = c_0\,\vartheta_3\,(3v, 3\tau) + c_1\,\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{3}\right).$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\vartheta_3\,\vartheta_0}\left(3\sqrt{\Theta_3\,\Theta_0} - \sqrt{\Theta_3^{\,1}\,\Theta_0^{\,1}}\right)$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\vartheta_3\,\vartheta_0}\left(\sqrt{\Theta_3\,\Theta_0} - \sqrt{\Theta_3^{\,1}\,\Theta_0^{\,1}}\right)$$

Dahin gehören auch die Relationen

$$\vartheta_3^{\,2}\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_0\,(v, \tau) = c_0\,.\,\vartheta_0\,(3v, 3\tau) + c_1\,\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right)$$

$$-\vartheta_1^{\,2}\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_2\,(v, \tau) = c_0\;\;\vartheta_2\,(3v, 3\tau) + c_1\,\vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{3}\right)$$

$$\vartheta_2^{\,2}\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_1\,(v, \tau) = c_0\;\;\vartheta_1\,(3v, 3\tau) - c_1\,\vartheta_1\left(v, \frac{\tau}{3}\right).$$

Um nun die Entwickelung des Produkts

$$\vartheta_3\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_2^{\,2}\,(v, \tau)$$

zu erhalten, vermehren wir v_1 und v_2 um $\frac{\tau}{2}$

$$\vartheta_3\,(v, \tau)\,.\,\vartheta_2^{\,2}\,(v, \tau)$$

$$= \sum \vartheta_3 \mid \varkappa_1 + 1 \mid (3v, 3\tau)\,.\,\vartheta_3 \left| \varkappa_2 + \frac{1}{2} \right| (0, 6\tau)\,.\,\vartheta_3 \left| \varkappa_3 + \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau).$$

$$-\vartheta_3\,(3v, 3\tau)\left[\vartheta_3 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau)\,.\,\vartheta_2 \left| \frac{3}{2} \right| (0, 6\tau) + \vartheta_2 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau)\,\vartheta_3 \left| \frac{3}{2} \right| (0, 6\tau)\right]$$

$$+\left[\vartheta_3 \mid 1 \mid (3v, 3\tau) + \vartheta_3 \mid 2 \mid (3v, 3\tau)\right]\left[\vartheta_3 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau)\,.\,\vartheta_3 \left| \frac{5}{2} \right| (0, 6\tau)\right.$$

$$\left. + \vartheta_2 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau)\,.\,\vartheta_2 \left| \frac{5}{2} \right| (0, 6\tau)\right]$$

Nach Früherem ist

$$\vartheta_3 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau) = \vartheta_2 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 2\tau) = \frac{1}{2}\,\vartheta_2\left(0, \frac{\tau}{2}\right)$$

Weiter ist leicht zu finden

$$\vartheta_3 \left| \frac{5}{2} \right| (0, 6\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\vartheta_2 \left(0, \frac{\tau}{6}\right) - \vartheta_2 \left(0, \frac{3\tau}{2}\right) \right) + \vartheta_0 \left| \frac{5}{4} \right| \left(0, \frac{3\tau}{2}\right) \right\}$$

und

$$\vartheta_3 \left| \frac{3}{2} \right| (0, 6\tau) = \vartheta_2 \left| \frac{3}{2} \right| (0, 6\tau) = \frac{1}{2} \vartheta_2 \left(0, \frac{3\tau}{2}\right).$$

Es resultiren schliesslich die Produkte:

III. $$\vartheta_2^2 (v_1, \tau) \cdot \vartheta_3 (v_1, \tau) = c_0 \cdot \vartheta_3 (3v_1, 3\tau) + c_1 \cdot \vartheta_3 \left(v_1, \frac{\tau}{3}\right).$$

$$\vartheta_1^2 (v_1, \tau) \cdot \vartheta_0 (v_1, \tau) = c_0 \cdot \vartheta_0 (3v_1, 3\tau) + c_1 \cdot \vartheta_0 \left(v_1, \frac{\tau}{3}\right).$$

$$\vartheta_3^2 (v, \tau) \cdot \vartheta_2 (v, \tau) \quad c_0 \cdot \vartheta_2 (3v, 3\tau) + c_1 \cdot \vartheta_2 \left(v, \frac{\tau}{3}\right)$$

$$-\vartheta_0^2 (v, \tau) \cdot \vartheta_1 (v, \tau) \quad c_0 \cdot \vartheta_1 (3v, 3\tau) - c_1 \cdot \vartheta_1 \left(v, \frac{\tau}{3}\right),$$

worin die Konstanten die Werte haben

a. $$c_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\vartheta_3 \vartheta_2} \left(3 \sqrt{\Theta_3 \Theta_2} - \sqrt{\Theta_2^1 \Theta_3^1} \right).$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\vartheta_3 \vartheta_2} \left(\sqrt{\Theta_3 \Theta_2} - \sqrt{\Theta_3^1 \Theta_2^1} \right).$$

Dies sind jedoch nicht die einzigen Konstanten, die den Relationen genügen. Wir wollen noch eine weitere Bestimmung derselben vornehmen, indem wir v_2 und v_3 um $\frac{\tau}{2}$ vermehren

$$\begin{aligned} \vartheta_2^2 (v, \tau) \cdot \vartheta_3 (v, \tau) &= \sum \vartheta_3 \,|\, \varkappa_1 + 1 \,|\, (3v, 3\tau) \cdot \vartheta_3 \,|\, \varkappa_2 + 1 \,|\, (0, 6\tau) \cdot \vartheta_3 \,|\, \varkappa_2 \,|\, (0, 2\tau) \\ &= \vartheta_3 (3v_1\, 3\tau) \left[\vartheta_3 (0, 2\tau) \cdot \vartheta_2 (0, 6\tau) + \vartheta_2 (0, 2\tau) \cdot \vartheta_3 (0, 6\tau) \right] \\ &+ \left[\vartheta_3 \,|\, 1 \,|\, (3v, 3\tau) + \vartheta_3 \,|\, 2 \,|\, (3v, 3\tau) \right] \\ &\quad \left[\vartheta_3 (0, 2\tau) \cdot \vartheta_3 \,|\, 1 \,|\, (0, 6\tau) + \vartheta_2 (0, 2\tau) \cdot \vartheta_3 \,|\, 4 \,|\, (0, 6\tau) \right] \\ &= c_0 \cdot \vartheta_3 (3v, 3\tau) + c_1 \cdot \vartheta_3 \left(v, \frac{\tau}{3}\right). \end{aligned}$$

b. $$c_0 = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2} \left(3 \sqrt{\Theta_3^2 - \Theta_0^2} - \sqrt{\Theta_3^{12} - \Theta_0^{12}} \right) \right.$$

$$\left. + \sqrt{\vartheta_3^2 - \vartheta_0^2} \left(3 \sqrt{\Theta_3^2 + \Theta_0^2} - \sqrt{\Theta_3^{12} + \Theta_0^{12}} \right) \right\}.$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_0^2}\left(\sqrt{\Theta_3^2-\Theta_0^2}-\sqrt{\Theta_3'^2-\Theta_0'^2}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}\left(\sqrt{\Theta_3^2+\Theta_0^2}-\sqrt{\Theta_3'^2+\Theta_0'^2}\right)\right\}.$$

Die Form dieser Grössen stimmt fast genau mit der in Formel I gefundenen überein. Es sind hier nur die Faktoren von $\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_0^2}$ und $\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}$ gegeneinander vertauscht. Wir gehen über zu der letzten Produktentwickelung und vermehren v_2 um $\frac{\tau-1}{2}$.

IV. $\vartheta_3^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_1(v,\tau)$

$$=-i\,\vartheta_0\Big|x_1+\frac{1}{2}\Big|(3v,3\tau)\,.\,\vartheta_0\Big|x_2+\frac{1}{2}\Big|(0,6\tau)\,.\,\vartheta_0\Big|x_3+\frac{1}{2}\Big|(0,2\tau)\,e^{-\frac{\pi i}{6}(2x_1-x_2+3x_3)}$$

$$= c_0\,.\,\vartheta_1(3v,3\tau)-c_1\,\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{3}\right)$$

$$-\vartheta_0^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau)=c_0\,\vartheta_2(3v,3\tau)+c_1\,.\,\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{3}\right)$$

$$\vartheta_1^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_3(v,\tau)=c_0\,\vartheta_3(3v,3\tau)+c_1\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)$$

$$\vartheta_2^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_0(v,\tau)=c_0\,\vartheta_0(3v,3\tau)+c_1\,\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right).$$

Die Konstanten haben die Werte:

$$c_0=\frac{1}{2}\sqrt{\vartheta_2\,\vartheta_0}\left(3\sqrt{\Theta_2\,\Theta_0}+\sqrt{\Theta_2'\,\Theta_0'}\right)$$

$$c_1=-\frac{1}{2}\sqrt{\vartheta_2\,\vartheta_0}\left(\sqrt{\Theta_2\,\Theta_0}+\sqrt{\Theta_2'\,\Theta_0'}\right).$$

Die für die Potenzen und Produkte des dritten Grades geltenden Entwickelungen sind demnach mit dem betreffenden Additionstheorem vollständig durchgeführt, sodass in den fertigen Formeln nur die ursprünglichen und die zum Grade 3 gehörenden transformirten Thetafunktionen vorkommen.

3) $n=4$. Wir wählen das System

$$a_{11}=1;\ a_{12}=1;\ a_{13}=1;\ a_{14}=1.\quad m_1=4.$$
$$a_{21}=1;\ a_{22}=1;\ a_{23}=-1;\ a_{24}=-1.\quad m_2=4.$$
$$a_{31}=1;\ a_{32}=-1;\ a_{33}=-1;\ a_{34}=+1.\quad m_3=4.$$
$$a_{41}=1;\ a_{42}=-1;\ a_{43}=+1;\ a_{44}=-1.\quad m_4=4.$$

Die Congruenzen lassen sich zusammenziehen zu

$$x_1+x_2\equiv 0 \bmod 2;\quad x_2+x_3\equiv 0 \bmod 2;\quad x_3+x_4\equiv 0 \bmod 2;$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 0 \bmod 4;$$

Die Grössen x nehmen danach die Werte an:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
x_2	0	0	2	2	1	1	3	3	0	2	0	2	1	1	3	3
x_3	0	2	0	2	1	3	1	3	0	0	2	2	1	3	1	3
x_4	0	2	2	0	1	3	3	1	2	0	0	2	3	1	1	3

Substituirt man diese Grössen und setzt $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, so ergiebt sich die Formel

$$\vartheta_3^4(v,\tau) = \vartheta_3(4v,4\tau).A + \vartheta_2(4v,4\tau).B + \left[\vartheta_3|1|(4v,4\tau) + \vartheta_3|3|(4v,4\tau)\right].C.$$

Darin bedeuten:

$$A = \vartheta_3^3(0,4\tau) + 3.\vartheta_3(0,4\tau).\vartheta_2^2(0,4\tau)$$
$$B = \vartheta_2^3(0,4\tau) + 3.\vartheta_2(0,4\tau).\vartheta_3^2(0,4\tau)$$
$$C = 4.\vartheta_3^3|1|(0,4\tau).$$

Damit ist die Transformation 4ten Grades vollständig gelöst, denn rechts kommt nur der Modul 4τ vor. Wir wollen indessen, wie Herr Rohde, den einfachen Parameter τ einführen. Es ist

$$\vartheta_3(4v,4\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3(2v,\tau) + \vartheta_0(2v,\tau)\right)$$
$$\vartheta_2(4v,4\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3(2v,\tau) - \vartheta_0(2v,\tau)\right)$$

Daraus folgt

$$\vartheta_3|1|(4v,4\tau) + \vartheta_3|3|(4v,4\tau) = \vartheta_2(2v,\tau)$$

und

$$\vartheta_3|1|(0,4\tau) = \vartheta_3|3|(0,4\tau) = \frac{1}{2}.\vartheta_2.$$

Setzt man diese neuen Beziehungen ein, so ergiebt sich die Formel

I.
$$\vartheta_3^4(v,\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^3.\vartheta_3(2v,\tau) + \vartheta_2^3.\vartheta_2(2v,\tau) + \vartheta_0^3.\vartheta_0(2v,\tau)\right)$$
$$\vartheta_0^4(v,\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^3.\vartheta_3(2v,\tau) - \vartheta_2^3.\vartheta_2(2v,\tau) + \vartheta_0^3.\vartheta_0(2v,\tau)\right)$$
$$\vartheta_2^4(v,\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^3.\vartheta_3(2v,\tau) + \vartheta_2^3.\vartheta_2(2v,\tau) - \vartheta_0^3.\vartheta_0(2v,\tau)\right)$$
$$\vartheta_1^4(v,\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^3.\vartheta_3(2v,\tau) - \vartheta_2^3.\vartheta_2(2v,\tau) - \vartheta_0^3.\vartheta_0(2v,\tau)\right)$$

Das Additionstheorem gestattet also auch in diesem Falle, die Potenzen in einfacher Weise auszudrücken. Die Produkte werden wieder durch Substitutionen erhalten. Wir vermehren v_1, v_2 und v_3 um $-\frac{1}{2}$

II. $\vartheta_0^3(v,\tau)\,.\,\vartheta_3(v,\tau)$

$$= \sum \vartheta_0 \mid x_1 \mid (4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_0 \mid x_2 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_0 \mid x_3 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_0 \mid x_4 \mid (0, 4\tau)\; e^{\frac{\pi i}{2} x_1}$$

$$= \vartheta_0(4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_0^3(0, 4\tau)$$

$$+ \left(\vartheta_0 \mid 1 \mid (4v, 4\tau) + \vartheta_0 \mid 3 \mid (4v, 4\tau)\right) e^{\frac{\pi i}{2}}\,.\,4\,.\,\vartheta_0^3 \mid 1 \mid (0, 4\tau)$$

$$= \vartheta_0(4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_0^3(0, 4\tau) + \vartheta_2\left(2v, \frac{2\tau+1}{2}\right).\frac{i}{4}\,.\,\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau+1}{2}\right)$$

Wir vermehren v_1 um $\frac{\tau}{2}$:

III. $$\vartheta_3^3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau) = \sum \vartheta_3 \left| x_1 + \frac{1}{2} \right| (4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \left| x_2 + \frac{1}{2} \right| (0, 4\tau)$$

$$.\,\vartheta_3 \left| x_3 + \frac{1}{2} \right| (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \left| x_4 + \frac{1}{2} \right| (0, 4\tau)$$

Unter Anwendung der Beziehungen

$$\vartheta_3(4v, 4\tau) + \vartheta_2(4v, 4\tau) = \frac{1}{2}\left[\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{4}\right) + \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{4}\right)\right]$$

und $$\vartheta_3 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 4\tau) + \vartheta_2 \left| \frac{1}{2} \right| (0, 4\tau) = \frac{1}{2}\;\vartheta_2\left(0, \frac{\tau}{4}\right)$$

folgt das Produkt

$$\vartheta_3^3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau) \quad \frac{1}{16}\left[\vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{4}\right).\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau}{4}\right) + \frac{1}{i}\vartheta_2\left(v, \frac{\tau+2}{4}\right).\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau+2}{4}\right)\right]$$

Indem wir v_1 und v_2 um $\frac{\tau}{2}$ vermehren, gelangen wir zu der Formel

IV. $$\vartheta_3^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_2^2(v,\tau)$$

$$= \sum \vartheta_3 \mid x_1 + 1 \mid (4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_2 + 1 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_3 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_4 \mid (0, 4\tau).$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vartheta_3\,.\,\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_3(2v, \tau) + \vartheta_3^2\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_2(2v, \tau)\right].$$

Schliesslich wollen wir noch v_1 um $\frac{\tau}{2}$, v_2 um $\frac{\tau-1}{2}$, v_3 um $-\frac{1}{2}$ vermehren.

V. $$\vartheta_3(v,\tau)\,.\,\vartheta_2(v,\tau)\,.\,\vartheta_1(v,\tau)\,.\,\vartheta_0(v,\tau)\,.\,i$$

$$\sum \vartheta_3 \mid x_1 + 1 \mid (4v, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_2 + 1 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_3 \mid (0, 4\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid x_4 \mid (0, 4\tau)\; e^{\frac{\pi i}{2}(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{1}{2}\,.\,\vartheta_3\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_1\;(2v, \tau).$$

Die übrigen Produkte ergeben sich in derselben Weise, wir sehen von

ihrer Entwickelung ab, da die Methode klar darliegt. Die Transformation 4ten Grades hat ebenfalls ihre vollständige Erledigung gefunden.

4) $n = 5$. Das System der Grössen a lautet:

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} = 1; & a_{12} = 1; & a_{13} = 1; & a_{14} = 1; & a_{15} = 1. \quad m_1 = 5. \\
a_{21} = 4; & a_{22} = -1; & a_{23} = -1; & a_{24} = -1; & a_{25} = -1. \quad m_2 = 20. \\
a_{31} = 0; & a_{32} = +1; & a_{33} = +1; & a_{34} = -1; & a_{35} = -1. \quad m_3 = 4. \\
a_{41} = 0; & a_{42} = +1; & a_{43} = -1; & a_{44} = +1; & a_{45} = -1. \quad m_4 = 4. \\
a_{51} = 0; & a_{52} = +1; & a_{53} = -1; & a_{54} = -1; & a_{55} = +1. \quad m_5 = 4.
\end{array}$$

Die Grössen x genügen den Congruenzen

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \bmod 5. \\
x_2 &\equiv 4r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5 \bmod 20. \\
x_3 &\equiv r_2 + r_3 - r_4 - r_5 \bmod 4. \\
x_4 &\equiv r_2 - r_3 + r_4 - r_5 \bmod 4. \\
x_5 &\equiv r_2 - r_3 - r_4 + r_5 \bmod 4.
\end{aligned}$$

Zählt man die Werte hierfür ab und substituirt dieselben in die Formel

$$\vartheta_3(v_1, \tau) \cdot \vartheta_3(v_2, \tau) \cdot \vartheta_3(v_3, \tau) \cdot \vartheta_3(v_4, \tau) \cdot \vartheta_3(v_5, \tau)$$

$$= \sum \vartheta_3 \mid x_1 \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5, 5\tau) \cdot \vartheta_3 \mid x_2 \mid (4v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5, 20\tau)$$
$$\times \vartheta_3 \mid x_3 \ (v_2 + v_3 - v_4 - v_5, 4\tau) \cdot \vartheta_3 \mid x_4 \cdot (v_2 - v_3 + v_4 - v_5, 4\tau) \cdot \vartheta_3 \mid x_5 \cdot (v_2 - v_3 - v_4 v_5, 4\tau)$$

nachdem man $v_1 \quad v_2 = \ldots = v_5$ gesetzt, so resultirt die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^5(v, \tau) = \vartheta_3(5v, 5\tau) \Big\{ & \vartheta_3(0, 20\tau) \cdot A + \vartheta_2(0, 20\tau) \cdot B \\
& + \Big[\vartheta_3 \mid 5 \mid (0, 20\tau) + \vartheta_2 \mid 5 \mid (0, 20\tau) \Big] \cdot C. \Big\} \\
+ \Big\{ \vartheta_3 \mid 1 \mid (5v, 5\tau) + \vartheta_3 \mid 4 \mid (5v, 5\tau) \Big\} & \Big\{ \vartheta_3 \mid 4 \mid (0, 20\tau) A + \vartheta_3 \mid 16 \mid (0, 20\tau) \cdot B \\
& + \Big[\vartheta_3 \mid 9 \mid (0, 20\tau) + \vartheta_2 \mid 9 \mid (0, 20\tau) \Big] \cdot C. \Big\} \\
+ \Big\{ \vartheta_3 \mid 2 \mid (5v, 5\tau) + \vartheta_3 \mid 3 \mid (5v, 5\tau) \Big\} & \Big\{ \vartheta_3 \mid 8 \mid (0, 20\tau) A + \vartheta_3 \mid 12 \mid (0, 20\tau) \cdot B \\
& + \Big[\vartheta_3 \mid 3 \mid (0, 20\tau) + \vartheta_2 \mid 3 \mid 0, 20\tau) \Big] \cdot C. \Big\}
\end{aligned}$$

Darin haben die Grössen A, B und C genau dieselbe Bedeutung, wie vorhin bei dem Falle $n = 4$. In der ganzen Formel tritt ausser den Faktoren mit dem Modul 20τ dreimal dieselbe Anordnung der Coefficienten (die den Modul 4τ enthalten) auf. Wir werden sehen, dass dasselbe auch bei höheren Transformationsgraden der Fall ist. Es ist klar, dass die Transformation 5ten Grades auf die des 4ten Grades zurückgeführt werden kann.

Die Faktoren, die den Modul 20τ enthalten, wollen wir in andere mit dem Parameter 5τ überführen

$$\vartheta_3(0, 20\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3(0, 5\tau) + \vartheta_0(0, 5\tau)\right)$$

$$\vartheta_2(0, 20\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3(0, 5\tau) - \vartheta_0(0, 5\tau)\right)$$

$$\vartheta_3 \mid 5 \mid (0, 20\tau) + \vartheta_2 \mid 5 \mid (0, 20\tau) = \vartheta_2(0, 5\tau).$$

Ferner ist

$$\vartheta_3 \mid 1 \mid (5v, 5\tau) + \vartheta_3 \mid 4 \mid (5v, 5\tau) = \frac{1}{5}\sum \alpha^{-\rho}\, \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3 \mid 2 \mid (5v, 5\tau) + \vartheta_3 \mid 3 \mid (5v, 5\tau) = \frac{1}{5}\sum \alpha^{-4\rho}\, \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3 \mid 3 \mid (0, 20\tau) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{10}\sum \alpha^{-4\rho^2}\left(\vartheta_2\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) + \vartheta_0 \left|\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right| (0, 5\tau)\right)\right\}$$

$$\vartheta_3 \mid 9 \mid (0, 20\tau) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{10}\sum \alpha^{-4\rho^{81}}\left(\vartheta_2\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) + \vartheta_0 \left|\begin{matrix}9\\2\end{matrix}\right| (0, 5\tau)\right)\right\}$$

$$\vartheta_3 \mid 4 \mid (0, 20\tau) = \frac{1}{2}\left\{\vartheta_3 \mid 2 \mid (0, 5\tau) + \vartheta_0 \mid 2 \mid (0, 5\tau)\right\}$$

Die Summen sind überall über ρ von 0 bis 4 zu erstrecken. Die Ausdrücke $\vartheta_0 \left|\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right| (0, 5\tau)$ und $\vartheta_0 \left|\begin{matrix}9\\2\end{matrix}\right| (0, 5\tau)$ brauchen nicht weiter entwickelt zu werden, da sie Null ergeben. Substituirt man alle neuen Grössen, so ergiebt sich die endgültige Formel:

I. $$\vartheta_3^5(v, \tau) = c_0\, \vartheta_3(5v, 5\tau) + \sum c_1 \,.\, \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right).$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\left\{\vartheta_3^3 \,.\, \vartheta_3(0, 5\tau) + \vartheta_0^3 \,.\, \vartheta_0(0, 5\tau) + \vartheta_2^3 \,.\, \vartheta_2(0, 5\tau)\right\}.$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left\{\vartheta_3^3 \,.\, \vartheta_3\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) + \vartheta_0^3\, \vartheta_0\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) + \vartheta_2^3 \,.\, \vartheta_2\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right)\right\}.$$

Mit den Potenzen wollen wir auch die Produkte des 5ten Grades berücksichtigen und vermehren dazu v_1 um $\frac{\tau}{2}$.

II. $$\vartheta_3^4(v, \tau) \,.\, \vartheta_2(v, \tau)$$

$$- \sum \vartheta_3 \left|\varkappa_1 + \frac{1}{2}\right| (5v, 5\tau) \,.\, \vartheta_3 \mid \varkappa_2 + 2 \mid (0, 20\tau) \,.\, \vartheta_3 \mid \varkappa_3 \mid (0, 4\tau) \,.\, \vartheta_3 \mid \varkappa_4 \mid (0, 4\tau) \,.\, \vartheta_3 \mid \varkappa_5 \mid (0, 4\tau)$$

$$- c_0 \,.\, \vartheta_2(5v, 5\tau) + \sum c_1 \,.\, \vartheta_2\left(v, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right).$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\left\{\vartheta_3^3 \,.\, \vartheta_3(0, 5\tau) - \vartheta_0^3 \,.\, \vartheta_0(0, 5\tau) + \vartheta_2^3 \,.\, \vartheta_2(0, 5\tau)\right\}$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left\{\vartheta_3^3 \,.\, \vartheta_3\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) \quad \vartheta_0^3 \,.\, \vartheta_0\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right) + \vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau + 32\rho}{5}\right)\right\}.$$

Vergrössert man v_1 um $-\frac{1}{2}$, v_4 und v_5 um $\frac{\tau}{2}$, so ist

III. $\vartheta_3^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_2^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_0(v,\tau)\,e^{\frac{\pi i}{10}(2x_1+x_2)}$

$=\sum \vartheta_0|x_1+1|(5v,5\tau)\,.\,\vartheta_3|x_2+1|(0,20\tau)\,.\,\vartheta_3|x_3+1|(0,4\tau)\,.\,\vartheta_3|x_4|(0,4\tau)\,.\,\vartheta_3|x_5|(0,4\tau).$

$$\vartheta_3^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_2^2(v,\tau)\,.\,\vartheta_0(v,\tau)=c_0\,.\,\vartheta_0(5v,5\tau)+\sum c_1\,\vartheta_0\left(v,\frac{\tau+32\rho}{5}\right).$$

$$c_0=\frac{1}{4}\left\{\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_3\,.\,\vartheta_3(0,5\tau)-\vartheta_3^2\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_2(0,5\tau)\right\}$$

$$c_1=\frac{1}{20}\left\{\vartheta_2^2\,.\,\vartheta_3\,.\,\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+32\rho}{5}\right)-\vartheta_3^2\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+32\rho}{5}\right)\right\}$$

Schliesslich wollen wir v_4 und v_5 um $-\frac{1}{2}$ vermehren:

IV. $\vartheta_3^3(v,\tau)\,.\,\vartheta_0^2(v,\tau)$

$$=\sum \vartheta_3\,|\,x_1\,|\,(5v,5\tau)\,.\,\vartheta_3\,|\,x_2\,|\,(0,20\tau)\,.\,\vartheta_3\,|\,x_3\,|\,(0,4\tau)\,.\,\vartheta_3\,|\,x_4\,|\,(0,4\tau)$$

$$\times\,\vartheta_3\,|\,x_5\,|\,(0,4\tau)\;e^{\frac{\pi i}{10}(x_2+5x_3-4x_1)}$$

$$=c_0\,.\,\vartheta_3(5v,5\tau)+\sum c_1\,\vartheta_3\left(v,\frac{\tau+32\rho}{5}\right)$$

$$c_0=\frac{1}{4}\left\{\vartheta_0^2\,.\,\vartheta_3\,.\,\vartheta_3(0,5\tau)+\vartheta_3^2\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_0(0,5\tau)\right\}$$

$$c_1=\frac{1}{20}\left\{\vartheta_0^2\,.\,\vartheta_3\,.\,\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+32\rho}{5}\right)+\vartheta_3^2\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+32\rho}{5}\right)\right\}.$$

Von der Entwickelung der übrigen Produkte wollen wir absehen, da diese sich in derselben Weise ergeben. Wir haben somit die Transformation 5ten Grades vollständig zu Ende geführt.

Abschnitt II.

Die Transformationen vom Grade 2^r, 2^r+1 und 2^r+2. Vollständige Lösung des Transformationsproblemes im ersten Falle.

§ 1.

Die Transformation vom Grade $n=2^r$.

Die Fälle $n=2$ und $n=4$ sind schon im ersten Abschnitt erledigt, wir wenden uns deshalb zur Transformation $n=8$. Es gilt dafür das Schema:

a_{ε_1}.	a_{ε_2}.	a_{ε_3}.	a_{ε_4}.	a_{ε_5}.	a_{ε_6}.	a_{ε_7}.	a_{ε_8}.	$\varepsilon = 1, 2 \ldots 8.$
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$m_1 = 8.$
+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1	$m_2 = 8.$
+1	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	$m_3 = 8.$
+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	$m_4 = 8.$
+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	$m_5 = 8.$
+1	−1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	$m_6 = 8.$
+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1	$m_7 = 8.$
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	$m_8 = 8.$

Mit Hülfe dieses Schemas haben wir ein Resultat von grosser Bedeutung gewonnen. Alle Moduln haben den Wert des Transformationsgrades, folglich ist die Transformation 8ten Grades vollständig durchführbar.

Zählt man die Werte ab, die den Congruenzen genügen

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &\equiv r_1 + r_2 + r_3 + \ldots \quad r_8 \bmod 8.\\
\varkappa_2 &\equiv r_1 + r_2 + r_3 + \ldots - r_8 \bmod 8.\\
\varkappa_3 &\equiv r_1 + r_2 - r_3 - \ldots + r_8 \bmod 8.\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\varkappa_8 &\equiv r_1 - r_2 + r_3 - \ldots - r_8 \bmod 8.
\end{aligned}$$

und substituirt dieselben, so folgt die für die Potenzen des Grades $n = 8$ geltende Formel:

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^8(v,\tau) = \vartheta_3(8v,8\tau)\Big\{&\vartheta_3^7(0,8\tau) + \frac{7!}{2!\,5!}\vartheta_3^5(0,8\tau)\cdot\vartheta_2^2(0,8\tau) + \ldots + 7\cdot\vartheta_3(0,8\tau)\cdot\vartheta_2^6(0,8\tau)\\
&+ 56\cdot\vartheta_3^4\,|\,2\,|\,(0,8\tau)\Big[\vartheta_3(0,8\tau) + \vartheta_2(0,8\tau)\Big]^3\Big\}\\
+\vartheta_2(8v,8\tau)\Big\{&\vartheta_2^7(0,8\tau) + \frac{7!}{2!\,5!}\cdot\vartheta_2^5(0,8\tau)\cdot\vartheta_3^2(0,8\tau) + \ldots + 7\cdot\vartheta_2(0,8\tau)\cdot\vartheta_3^6(0,8\tau)\\
&+ 56\cdot\vartheta_3^4\,|\,2\,|\,(0,8\tau)\Big[\vartheta_3(0,8\tau) + \vartheta_2(0,8\tau)\Big]^3\Big\}\cdot\\
+\Big[&\vartheta_3\,|\,2\,|\,(8v,8\tau) + \vartheta_3\,|\,6\,|\,(8v,8\tau)\Big]\\
&\Big[\vartheta_3^7\,|\,2\,|\,(0,8\tau)\,64 + 28\cdot\vartheta_3^3\,|\,2\,|\,(0,8\tau)\Big(\vartheta_3(0,8\tau) + \vartheta_2(0,8\tau)\Big)^4\Big]\\
+\Big[&\vartheta_3\,|\,1\,|\,(8v,8\tau) + \vartheta_3\,|\,7\,|\,(8v,8\tau)\Big]\Big[8\Big(\vartheta_3^7\,|\,1\,|\,(0,8\tau) + \vartheta_3^5\,|\,1\,(0,8\tau)\cdot\vartheta_3^2\,|\,5\,|\,(0,8\tau)\cdot\frac{7!}{5!\,2!}\\
&+ \vartheta_3^3\,|\,1\,|\,(0,8\tau)\cdot\vartheta_3^4\,|\,5\,|\,(0,8\tau)\cdot\frac{7!}{4!\,3!} + \vartheta_3\,|\,1\,|\,(0,8\tau)\cdot\vartheta_3^6\,|\,5\,|\,(0,8\tau\cdot 7\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$+\left[\vartheta_3|3|(8v,8\tau)+\vartheta_3|5|(8v,8\tau)\right]\left[8\left(\vartheta_3^{7}|3|(0,8\tau)+\vartheta_3^{5}|3|(0,8\tau).\vartheta_3^{2}.7\,(0,8\tau).\frac{7!}{5!\,2!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\vartheta_3^{3}|3|(0,8\tau).\vartheta_3^{4}|7,(0,8\tau).\frac{7!}{4!\,3!}+\vartheta_3|3|(0,8\tau)\,\vartheta_3^{6}|7|(0,8\tau).7\right)\right].$$

Die Transformation 8ten Grades ist demnach vollständig gelöst.

Es ist zu beachten, dass

$$\vartheta_3\,|\,\alpha\,|\,(0,\,8\tau) = \vartheta_3\,|\,8-\alpha\,|\,(0,\,8\tau).$$

Der Beweis ist leicht zu liefern aus den Definitionsgleichungen.

2) Die Transformation $n = 16$.

Als Schema der Grössen a wählen wir

$a_{1\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$a_{2\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
$a_{3\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$a_{4\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1
$a_{5\varepsilon}$	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1
$a_{6\varepsilon}$	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1
$a_{7\varepsilon}$	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1
$a_{8\varepsilon}$	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1
$a_{9\varepsilon}$	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1
$a_{10\varepsilon}$	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1
$a_{11\varepsilon}$	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1
$a_{12\varepsilon}$	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1
$a_{13\varepsilon}$	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1
$a_{14\varepsilon}$	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1
$a_{15\varepsilon}$	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1
$a_{16\varepsilon}$	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1

Der Index ε ist zu zählen von 1 bis 16. Da die Moduln alle denselben Wert haben

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_{16} = 16.$$

so ist auch die Transformation $n = 16$ vollständig gelöst. Ermitteln wir die Werte der Grössen $\varkappa$, die den Congruenzen genügen:

$$\varkappa_1 \equiv r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{16} \bmod 16$$
$$\varkappa_2 \equiv r_1 + r_2 + r_3 + \ldots - r_{16} \bmod 16$$
$$\varkappa_3 \equiv r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{16} \bmod 16$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varkappa_{16} \equiv r_1 - r_2 + \ldots - r_{16} \bmod 16$$

und substituiren dieselben, so ergiebt sich die Transformationsformel, die wir jedoch ihrer Länge wegen nur andeuten wollen.

$$\vartheta_3^{16}(v,\tau) = \vartheta_3(16v,16\tau)\Big\{\vartheta_3^{15}(0,16\tau) + \frac{15!}{2!\,13!}\vartheta_3^{13}(0,16\tau)\,.\,\vartheta_2^{2}(0,16\tau) + \ldots .$$

$$+ 15\,.\,\vartheta_3(0,16\tau)\,.\,\vartheta_2^{14}(0,16\tau) + A\Big\}$$

$$+ \vartheta_2(16v,16\tau)\Big\{\vartheta_2^{15}(0,16\tau) + \frac{15!}{2!\,13!}\vartheta_2^{13}(0,16\tau)\,.\,\vartheta_3^{2}(0,16\tau) + \ldots .$$

$$+ 15\,.\,\vartheta_2(0,16\tau)\,.\,\vartheta_3^{14}(0,16\tau) + A\Big\}$$

$$+ \sum \alpha_\varkappa \left(\vartheta_3 \mid \varkappa \mid (16v,16\tau) + \vartheta_3 \mid 16-\varkappa \mid (16v,16\tau)\right).$$

Darin ist die Summe auszudehnen über alle $\varkappa$ von 1 bis 7. Die Coefficienten enthalten nur Thetafunktionen von der Form $\vartheta_3 \mid b \mid (0, 16\tau)$. Man hat zu merken, dass b gerade resp. ungerade ist, je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade. Die Coefficienten selbst erhält man durch Abzählen aus den Congruenzen.

3) Der allgemeine Fall. Wir wollen nicht die Formel für den allgemeinen Grad $n = 2^r$ aufstellen, da dies nur darauf hinauskommt, die Werte, die den Congruenzen genügen, abzuzählen. Es genügt uns, zu wissen, dass es immer möglich ist, Transformationen, deren Grad eine Potenz von 2 ist, sofort mit dem betreffenden Additionstheorem zu lösen. Von Bedeutung allein ist dabei die Aufstellung des Schemas der Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$. Wir wollen die Darstellung desselben kurz skizziren. Die einzelnen Glieder $a_{\varepsilon\varkappa}$ sind entweder der positiven oder negativen Einheit gleich. Die Glieder der ersten Horizontalreihe müssen sämmtlich gleich $+1$ sein, in allen übrigen Horizentalreihen muss die Hälfte der Glieder gleich $+1$, die andere gleich -1 sein. Die Vorzeichen sind so zu wählen, dass die Gleichungen bestehen bleiben

$$a_{\varepsilon_1}\,a_{\varkappa_1} + a_{\varepsilon_2}\,a_{\varkappa_2} \ldots\ldots + a_{\varepsilon n}\,.\,a_{\varkappa n} = 0 \quad \varepsilon \gtrless \varkappa.$$

Die Möglichkeit hierfür folgt unmittelbar.

	a_{ε_1}	a_{ε_2}	a_{ε_3}	a_{ε_4}	. . .	$a_{\varepsilon,\frac{n}{2}}$	$a_{\varepsilon,\frac{n}{2}+1}$	. . . .	$a_{\varepsilon n}$
$a_{1\varepsilon}$	+1	+1	+1	+1	+1 +1 . .	+1	+1 +1	. . . .	+1
$a_{2\varepsilon}$	+1	+1	+1	+1	+1 +1 . .	+1	−1 −1	. . . .	−1
$a_{3\varepsilon}$	+1	.	.	.	. . . .	.	−1 .	. . . .	+1
$a_{4\varepsilon}$	+1	.	.	.	. . . .	.	+1 .	. . . .	−1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	+1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{n}{16},\varepsilon$	+1	+1	+1	+1	+1 +1 . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{n}{16}+1,\varepsilon$	+1	+1	+1	+1	+1 +1 . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{n}{8},\varepsilon$	+1	+1	+1	+1	+1 +1 . .	.	. .	. . . .	−1
$a\frac{n}{8}+1,\varepsilon$	+1	+1	+1	+1	−1 −1 . .	.	. .	. . . .	+1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{n}{4},\varepsilon$	+1	+1	+1	+1	−1 −1 . .	.	. .	. . . .	−1
$a\frac{n}{4}+1,\varepsilon$	+1	+1	−1	−1	+1 +1 . .	.	. .	. . . .	+1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{n}{2},\varepsilon$	+1	+1	−1	−1	+1 +1 . .	.	. .	. . . .	−1
$a\frac{n}{2}+1,\varepsilon$	+1	−1	−1	+1	−1 +1 . .	.	. .	. . . .	+1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
$a\frac{3}{4}n,\varepsilon$	+1	−1	−1	+1	−1 +1 . .	.	. .	. . . .	−1
$a\frac{3}{4}n+1,\varepsilon$	+1	−1	+1	−1	+1 −1 . .	.	. .	. . . .	+1
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	.
.	.	.	.	.	. . . .	.	. .	. . . .	+1
a_{nn}	+1	−1	+1	−1	+1 −1 +1	.	. .	. . . .	−1.

$$m_1 = m_2 = m_3 \ . \ . \ . \ . = m_n = 2^r.$$

Es steht nunmehr das wichtige Resultat fest, dass die allgemeine Transformation, deren Grad eine Potenz von 2 ist, mit dem vorliegenden Additionstheorem auf Grund des soeben untersuchten Schemas der Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$ ihre sofortige Lösung findet.

§ 2.

Die Transformation vom Grade $2^r + 1$.

1) Für den Fall $n = 5$ hatten wir schon gefunden

$$\begin{array}{lllll} a_{11} = 1; & a_{12} = 1; & a_{13} = 1; & a_{14} = 1; & a_{15} = 1. \\ a_{21} = 4; & a_{22} = -1; & a_{23} = -1; & a_{24} = -1; & a_{25} = -1. \\ a_{31} = 0. & a_{32} = +1; & a_{33} = +1; & a_{34} = -1; & a_{35} = -1. \\ a_{41} = 0. & a_{42} = +1; & a_{43} = -1; & a_{44} = -1; & a_{45} = +1. \\ a_{51} = 0. & a_{52} = +1; & a_{53} = -1; & a_{54} = +1; & a_{55} = -1. \end{array}$$

woraus sich die Moduln ergaben

$$m_1 = 5;\ m_2 = 20;\ m_3 = m_4 = m_5 = 4.$$

Die Entwickelung der Potenzen des 5ten Grades war ebenfalls gelöst.

2) $n = 9$. Wir wählen das Schema der Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$

$a_{\varepsilon 1}$	$a_{\varepsilon 2}$	$a_{\varepsilon 3}$	$a_{\varepsilon 4}$	$a_{\varepsilon 5}$	$a_{\varepsilon 6}$	$a_{\varepsilon 7}$	$a_{\varepsilon 8}$	$a_{\varepsilon 9}$
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	+3	+3	+3	+3	−3	−3	−3	−3
0	+1	+1	−1	−1	0	0	0	0
0	+1	−1	−1	+1	0	0	0	0
0	+1	−1	+1	−1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+1	+1	−1	−1
0	0	0	0	0	+1	−1	−1	+1
0	0	0	0	0	+1	−1	+1	−1

Die Moduln lauten

$$m_1 = 9;\ m_2 = m_3 = 72;\ m_4 = m_5 = \ldots = m_9 = 4.$$

Ausdrücke mit dem Modul 72τ sind immer auf solche mit dem Parameter 9τ zu reduciren:

$$\vartheta_3(0, 72\tau) = \frac{1}{2}\left\{\vartheta_3(0, 18\tau) + \vartheta_0(0, 18\tau)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^2(0, 9\tau) + \vartheta_0^2(0, 9\tau)}{2}} + \sqrt{\vartheta_3(0, 9\tau)\,.\,\vartheta_0(0, 9\tau)}\right\}$$

und

$$\vartheta_3\left|\varkappa\right|(0, 72\tau) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^2\left|\frac{\varkappa}{4}\right|(0,9\tau) + \vartheta_0^2\left|\frac{\varkappa}{4}\right|(0,9\tau)}{2}} + \sqrt{\vartheta_3\left|\frac{\varkappa}{4}\right|(0,9\tau)\,.\,\vartheta_0\left|\frac{\varkappa}{4}\right|(0,9\tau)}\right\}$$

Ausser dieser Darstellung giebt es noch eine zweite. Wir können auch setzen

$$m_1 = 9;\ m_2 = m_3 = 72;\ m_4 = m_5 = \ldots = m_9 = 36.$$

Darin hat man dann zu substituiren

$$\vartheta_3 \left| \begin{matrix} x \\ \end{matrix} \right. (0,36\tau) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^2 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. (0,9\tau) + \vartheta_0^2 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. (0,9\tau)}{2}} + \sqrt{\vartheta_3 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. (0,9\tau) \cdot \vartheta_0 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. (0,9\tau)}\right\}$$

In der fertigen Entwickelung würde nur der Modul 9τ enthalten sein. Die Transformation $n = 9$ ist demnach vollständig lösbar.

3) $n = 17$. Wir sehen von der Aufstellung des Schemas ab, indem wir bemerken, dass letzteres so zu wählen ist, dass der Modul 4τ möglichst oft auftritt. Das kann $3 \cdot 2^{r-2}$ mal für den Fall $n = 2^r + 1$ geschehen, was leicht zu zeigen ist. Die Moduln lauten demnach für den vorliegenden Fall

$$m_1 = 17;\ m_2 = 17 \cdot 16;\ m_3 = 16;\ m_4 = m_5 = 8;\ m_6 = m_7 = \ldots = m_{17} = 4.$$

4) Allgemein $n = 2^r + 1$. Das allgemeine Gesetz der Moduln ist nunmehr leicht zu eruiren

$$m_1 = 2^r + 1;\ m_2 = (2^r + 1)\, 2^r;\ m_3 = 2^r;\ m_4 = m_5 = 2^{r-1};\ \ldots\ldots$$
$$m_{2^{r-3} \cdot 2^{\frac{r-2}{r-2}}} = \ldots\ldots\ldots = m_{2^r+1} = 4.$$

Man sieht, dass ausser dem Modul $(2^r + 1)\,\tau$ und den Moduln, die Potenzen von 2 sind, nur noch vorkommt

$$m_2 = (2^r + 1) \cdot 2^r \cdot \tau.$$

Wenn die Zahl $2^r + 1$ eine Primzahl ist, so wenden wir die von Herrn Rohde pag. 30 seiner Arbeit angegebene Formel an

$$\vartheta_3 \left| \begin{matrix} (n-1)x \\ \end{matrix} \right. \left(0,\ n \cdot (n-1)\ \tau\right) = \frac{1}{2n} \sum \alpha^{-\rho x^2}\, \vartheta_3 \left(0,\ \frac{(n-1)\tau + 2^n \rho}{n}\right). \rho = 0, 1 \ldots n-1.$$

um den zum Grade $n = 2^r + 1$ gehörenden Modul zu erhalten. Im anderen Falle aber — wenn n keine Primzahl ist — verfahren wir folgendermassen. Es besteht die Gleichung:

$$\vartheta_3 \left| \begin{matrix} x \\ \end{matrix} \right. \left(0, n \cdot (n-1)\,\tau\right) = \frac{1}{2}\left\{\vartheta_3 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. \left(\frac{0, n \cdot n-1}{4}\,\tau\right) + \vartheta_0 \left| \begin{matrix} x \\ 2 \end{matrix} \right. \left(\frac{0, n \cdot n-1}{4}\,\tau\right)\right\}$$

So hat man weiter zu reduciren, bis rechts nur noch der Modul $n\tau$ auftritt. Zwar sind rechts die Charakteristiken gebrochene Zahlen, diese verschwinden jedoch, wenn man schliesslich die geeigneten von Herrn Rohde

angegebenen und schon vielfach von uns benutzten Formeln anwendet. Schreitet man in der soeben erwähnten Reduktion fort, so gelangt man zu Irrationalitäten. Es ist nicht schwer, die hier auftretenden Gesetze zu entwickeln. Es möge in Bezug hierauf vor allem auf die Schrötersche Arbeit aufmerksam gemacht werden — indessen soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden. Ausser den oben aufgestellten Werten der Grössen m sind aber noch andere möglich. Unter ihnen nehmen die folgenden einen hervorragenden Platz ein:

$n = 9.$ $m_1 = 9;$ $m_2 = 72;$ $m_3 = m_4 = \ldots = m_9 = 8.$
$n = 17.$ $m_1 = 17;$ $m_2 = 17 \cdot 16:$ $m_3 = m_4 = \ldots = m_{17} = 16.$
$n = 33.$ $m_1 = 33;$ $m_2 = 33 \cdot 32:$ $m_3 = m_4 = \ldots = m_{33} = 32.$
$n = 2^r + 1:$ $m_1 = 2^r + 1:$ $m_2 = (2^r + 1)\, 2^r:$ $m_3 = m_4 = \ldots = m_n = 2^r.$

Auch hier tritt ausser den Moduln $2^r\tau$ und $(2^r + 1)\,\tau$ nur noch auf $m_2 = (2^r + 1)\, 2^r\tau$. Wir haben das Resultat gewonnen, dass sich das allgemeine Transformationsproblem vom Grade $2^r + 1$ auf dasjenige vom Grade $n = 2^r$ zurückführen lässt, wobei freilich das letztere in anderer Weise zu verstehen ist, wie in der Einleitung angegeben. Es braucht hierauf nicht näher eingegangen zu werden. Alle Coefficienten mit den Nullwerten der Argumente, die in den Relationen für $n = 2^r$ vorkommen, erscheinen in genau derselben Gestalt und Reihenfolge wieder in den Formeln für die Grade $n = 2^r + 1$. Die früher durchgeführte Transformation $n = 5$ zeigt dies augenscheinlich.

§ 3.

Die Transformation vom Grade $2^r + 2$.

1) $n = 6$. Wir haben zu setzen

$a_{11} = 1;\ a_{12} = 1;\ a_{13} = 1;\ a_{14} = 1;\ a_{15} = 1;\ a_{16} = 1.$
$a_{21} = 1;\ a_{22} = 1;\ a_{23} = 1;\ a_{24} = -1;\ a_{25} = -1;\ a_{26} = -1.$
$a_{31} = 2;\ a_{32} = -1;\ a_{33} = -1;\ a_{34} = 0;\ a_{35} = 0;\ a_{36} = 0.$
$a_{41} = 0;\ a_{42} = 0;\ a_{43} = 0;\ a_{44} = 2;\ a_{45} = -1;\ a_{46} = -1.$
$a_{51} = 0;\ a_{52} = +1;\ a_{53} = -1;\ a_{54} = 0;\ a_{55} = +1;\ a_{56} = -1.$
$a_{61} = 0;\ a_{62} = +1;\ a_{63} = -1;\ a_{64} = 0;\ a_{65} = -1;\ a_{66} = +1.$

woraus die Werte der Moduln folgen

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 6;\ m_5 = m_6 = 4.$$

Die Transformation $n = 6$ ist damit vollständig gelöst.

2) Für den Fall $n = 10$ stellen wir für die Zahlen $a_{\varepsilon\varkappa}$ folgendes Schema auf:

$a_{1\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
$a_{2\varepsilon}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
$a_{3\varepsilon}$	+ 4	− 1	− 1	− 1	− 1	0	0	0	0	0	
$a_{4\varepsilon}$	0	0	0	0	0	+ 4	− 1	− 1	− 1	− 1	
$a_{5\varepsilon}$	0	+ 1	+ 1	− 1	− 1	0	0	0	0	0	
$a_{6\varepsilon}$	0	+ 1	− 1	− 1	+ 1	0	0	0	0	0	
$a_{7\varepsilon}$	0	+ 1	− 1	+ 1	− 1	0	0	0	0	0	
$a_{8\varepsilon}$	0	0	0	0	0	0	+ 1	+ 1	− 1	− 1	
$a_{9\varepsilon}$	0	0	0	0	0	0	+ 1	− 1	− 1	+ 1	
$a_{10\varepsilon}$	0	0	0	0	0	0	+ 1	− 1	+ 1	− 1	

Die Moduln, die bisher unbekannt waren, lauten

$$m_1 = m_2 = 10;\ m_3 = m_4 = 20;\ m_5 = m_6 = \ldots = m_{10} = 4.$$

Statt 4τ könnte man auch einführen 8τ, indessen ist es besser, den ersten Modul beizubehalten, da Thetafunktionen, die den zweiten enthalten, sich nicht mehr rational durch solche ausdrücken lassen, in denen, der einfache Parameter τ vorkommt. Thetafunktionen mit dem Modul 20τ sind folgendermassen umzuformen

$$\vartheta_3\ (0, 20\tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,2}\ (0, 10\tau) + \vartheta_0^{\,2}\ (0, 10\tau)}{2}}$$

$$\vartheta_3 \left| \begin{matrix} \varkappa \\ \end{matrix} \right| (0, 20\tau) = \frac{1}{\vartheta_2\ (0, 20\tau}\left\{ \vartheta_2^{\,2} \left| \begin{matrix} \frac{\varkappa}{2} \\ \end{matrix} \right| (0, 10\tau) + \vartheta_1^{\,2} \left| \begin{matrix} \frac{\varkappa}{2} \\ \end{matrix} \right| (0, 10\tau) \right\}$$

Hinsichtlich der gebrochenen Charakteristiken gilt dieselbe Bemerkung, wie im vorigen Paragraphen. Es möge in Bezug hierauf auf eine von Herrn Rohde pag. 30 oben (Dissertation) abgeleitete Formel verwiesen werden. Nunmehr ist die Transformation zehnten Grades erledigt. Dieselbe lässt sich, wie aus den Werten der Moduln hervorgeht, auf diejenige des vierten Grades reduciren.

3) $n = 18$. Die Moduln können für diesen Fall die Werte annehmen:

$$m_1 = m_2 = 18;\ m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 72;\ m_7 = m_8 = \ldots = m_{18} = 4.$$

Thetafunktionen mit dem Modul 72τ sind immer durch andere mit dem Modul 18τ ausdrückbar, wie aus einer Bemerkung des vorhergehenden Paragraphen ersichtlich ist. Die Transformation vom Grade 18 ist also auch vollständig gemäss der in der Einleitung gestellten Aufgabe des Transformationsproblemes zu lösen. Wenn wir statt der

Moduln m_5 und m_6 die neuen $m_5 = m_6 = 8$ einführen, so würde das Schema der Zahlen $a_{\varepsilon\varkappa}$ lauten:

a_{ε_1}	a_{ε_2}	a_{ε_3}	a_{ε_4}	a_{ε_5}	a_{ε_6}	a_{ε_7}	a_{ε_8}	a_{ε_9}	$a_{\varepsilon_{10}}$	$a_{\varepsilon_{11}}$	$a_{\varepsilon_{12}}$	$a_{\varepsilon_{13}}$	$a_{\varepsilon_{14}}$	$a_{\varepsilon_{15}}$	$a_{\varepsilon_{16}}$	$a_{\varepsilon_{17}}$	$a_{\varepsilon_{18}}$
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
+ 8	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 8	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1
0	+ 1	+ 1	− 1	− 1	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	+ 1	− 1	− 1	+ 1	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	+ 1	− 1	+ 1	− 1	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	.	+ 1	+ 1	− 1	− 1	0	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	.	+ 1	− 1	− 1	+ 1	0	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	.	+ 1	− 1	+ 1	− 1	0	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	.	.	.	.	.	0	+ 1	+ 1	− 1	− 1	.	.	.	.
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	− 1	− 1	+ 1	.	.	.	.
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	− 1	+ 1	− 1	.	.	.	.
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	+ 1	− 1	− 1
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	− 1	− 1	+ 1
0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 1	− 1	+ 1	− 1

4) $n = 34$. Es resultiren die Moduln

$m_1 = m_2 = 34$; $m_3 = m_4 = 8 \cdot 34$. $m_5 = \ldots = m_{10} = 16$; $m_{11} = \ldots m_{34} = 4$.

Es kommen also Ausdrücke vor, die sich nicht mehr rational in andere mit dem einfachen Modul τ überführen lassen. Ebenso ist es mit höheren Graden dieser Art. Für die Aufstellung des Schemas der Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$ ist zu merken, dass man auch hier den Modul 4τ möglichst oft zu erhalten bemüht sein muss. Die Maximalzahl dafür erreicht wieder die Grösse $3 \cdot 2^{r-2}$. Dies gilt mit Ausnahme des Falles $n = 6$ für alle Grade von der Form $2^r + 2$.

5) Das allgemeine Gesetz der Moduln lautet

$$m_1 = m_2 = 2^r + 2\,;\; m_3 = m_4 = (2^n + 2)\, 2^{r-2};\; m_5 = m_6 = \ldots m_{2^{r-2}+2}^{r-2} = 2^{r-1}\,;\; \ldots$$

$$m_\alpha = \ldots m_{2^r+2}^{r-2} = 4.$$

Darin ist α zu zählen von $2^r + 3 - 3 \cdot 2^{r-2}$ an. Die Transformation sechsten Grades befolgt dieses Gesetz nicht, da hier der Modul 4τ nur zweimal auftritt. Wir sehen aus dem Gesetz, dass ausser $n = 2^r + 2$ und den Moduln, die Potenzen von 2 sind, nur noch $m = (2^r + 2)\, 2^{r-2}\tau$ vorkommt. Die Transformation $n = 2^r + 2$ ist demnach auf eine solche vom Grade 2^{r-1} reducirbar.

Abschnitt III.

Aufstellung zweier neuen Additionstheoreme. Nochmalige Behandlung der Transformationen vom Grade $n = 2^r$, $2^r + 1$ und $2^r + 2$.

§ 1.

Die beiden Additionstheoreme.*)

Die beiden Additionstheoreme sind ursprünglich für zwei Variable aufgestellt. Wir entwickeln dieselben sofort für eine Veränderliche. Unter den analogen Beweisen wie für das im ersten Abschnitt hergeleitete Additionstheorem gilt das neue

1) $$2^{2n} \prod \vartheta_3 (v_\varkappa, \tau)$$
$$= \sum \prod \vartheta_3 \left| \frac{g_\varkappa}{2} \right| \left(\frac{a_{\varkappa_1} (v_1 - \varepsilon_1)}{2} + \frac{a_{\varkappa_2} (v_2 - \varepsilon_2)}{2} + \ldots \frac{+ a_{\varkappa_n} (v_n + \varepsilon_n)}{2}, n_\varkappa \tau \right)$$

Das Produkt ist über alle $\varkappa$ von 1 bis n zu nehmen, die Summe dagegen erstens über alle $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, zweitens über alle $g_\varkappa$ auszudehnen, die den Congruenzen genügen

$$\frac{g_\varkappa}{2} \equiv \frac{a_{\varkappa_1} \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{a_{\varkappa_2} \cdot \varepsilon_2}{2} + \ldots + \frac{a_{\varkappa_n} \cdot \varepsilon_n}{2} \bmod n_\varkappa.$$

Es ist hier die allgemeinere Annahme getroffen, dass die Grössen $a_{\varkappa\varepsilon}$ die Hälften ganzer Zahlen sind. Das Argument $w_\varkappa$ (analog $v'_\varkappa$ in I.) hat demnach folgende Bedeutung:

$$2w_\varkappa = a_{\varkappa_1} v_1 + a_{\varkappa_2} v_2 + \ldots + a_{\varkappa_n} v_n.$$

wobei die Grössen a wieder ganze Zahlen sind und den Bedingungsgleichungen zu genügen haben

$$\frac{a_{1\varkappa}^2}{m_1} + \frac{a_{2\varkappa}^2}{m_2} + \ldots \frac{a_{n\varkappa}^2}{m_n} = 4.$$

$$\frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1\varkappa}}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon} \cdot a_{2\varkappa}}{m_2} + \ldots \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{n\varkappa}}{m_n} = 0. \quad \varepsilon = 1, 2 \ldots n.$$

oder

$$a_{\varkappa_1}^2 + a_{\varkappa_2}^2 + a_{\varkappa_3}^2 + \ldots + a_{\varkappa n}^2 = 4n_\varkappa.$$
$$a_{\varepsilon_1} \cdot a_{\varkappa_1} + a_{\varepsilon_2} \cdot a_{\varkappa_2} + \ldots + a_{\varepsilon n} \cdot a_{\varkappa n} = 0.$$

Damit nur die Argumente nv und Null vorkommen, wenn $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots v_n$ gesetzt wird, sollen die Zahlen $a_{\varepsilon\varkappa}$ den weiteren Bedingungen unterworfen werden:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} = 2n$$
$$a_{\varkappa_1} + a_{\varkappa_2} + a_{\varkappa_3} + \ldots + a_{\varkappa n} = 0 \,.\, \varkappa > 1.$$

*) M. Krause, Mathematische Annalen, Bd. 27.

Mit diesem Additionstheorem sollen noch einmal die früher behandelten Transformationen untersucht werden.

2) Das letzte Additionstheorem lautet

$$\prod \vartheta_3 (v_\varkappa, m_\varkappa \tau) = \sum \prod \vartheta_3 \mid g_\varkappa \mid (w_\varkappa, n_\varkappa \tau)$$

Es existiren dafür die Bedingungen

$$m_1 \; a_{\varkappa_1}{}^2 \quad + m_2 \; a_{\varkappa_2}{}^2 \quad + \ldots + m_n \, a_{\varkappa n}^2 \qquad = n_\varkappa.$$

$$m_1 \, . \, a_{\varepsilon_1} \, a_{\varkappa_1} + m_2 \; a_{\varepsilon_2} \, a_{\varkappa_2} + \ldots + m_n \, a_{\varepsilon\varkappa} \, a_{\varkappa n} = 0.$$

und es sind die Congruenzen zu erfüllen

$$g_\varkappa \equiv a_{\varkappa_1} \, m_1 \, s_1 + a_{\varkappa_2} \, m_2 \, . \, s_2 + \ldots + a_{\varkappa n} \, m_n \, . \, s_n \bmod n_\varkappa.$$

Die Bedeutung dieses Theorems wird im fünften Paragraphen auseinandergesetzt.

§ 2.

Die Transformation vom Grade 2^r.

1) $n = 4$; Wir setzen

$$a_{11} = 2; \; a_{12} = \quad 2; \; a_{13} = \quad 2; \; a_{14} = \quad 2.$$
$$a_{21} = 1; \; a_{22} = \quad 1; \; a_{23} = -1; \; a_{24} = -1.$$
$$a_{31} = 1; \; a_{32} = -1; \; a_{33} = -1; \; a_{34} = +1.$$
$$a_{41} = 1; \; a_{42} = -1; \; a_{43} = +1; \; a_{44} = -1.$$

wonach die Moduln lauten: $n_1 = 4$; $n_2 = n_3 = n_4 = 1$.

2) Für den folgenden Fall $n = 8$ wäre

$a_{1\varepsilon}$	2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2
$a_{2\varepsilon}$	+2	+2	+2	+2	−2	−2	−2	−2
$a_{3\varepsilon}$	+1	+1	−1	−1	0	0	0	0
$a_{4\varepsilon}$	+1	−1	−1	+1	0	0	0	0
$a_{5\varepsilon}$	+1	−1	+1	−1	0	0	0	0
$a_{6\varepsilon}$	0	0	0	0	+1	+1	−1	−1
$a_{7\varepsilon}$	0	0	0	0	+1	−1	−1	+1
$a_{8\varepsilon}$	0	0	0	0	+1	−1	+1	−1

Die Moduln erhalten danach die Werte

$$n_1 = n_2 = 8; \; n_3 = n_4 = \ldots = n_8 = 1.$$

3) $n = 16$. Das Schema ist leicht den obigen analog zu bilden. Es ergeben sich die Moduln

$$n_1 = \ldots = n_4 = 16; \; n_5 = n_6 = \ldots = n_{16} = 1.$$

4) Allgemein $n = 2^r$;

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_{2^{r-2}} = 2^r; \; n_{2^{r-2}+1} = \ldots = n_{2^r} = 1.$$

Ausser dem Modul $n\tau$ ist nur noch der einfache in den Formeln enthalten. Die Transformation vom Grade 2^r ist somit in einfacherer Weise als vorhin gelöst.

§ 3.

Die Transformation vom Grade $2^r + 1$.

1) $n = 3$. Dieser Fall liefert keine neuen Resultate, wir übergehen ihn deshalb.

2) $n = 5$. Wir gehen aus von dem Schema

$$\begin{array}{lllll} a_{11} = 2; & a_{12} = 2; & a_{13} = 2; & a_{14} = 2; & a_{15} = 2. \\ a_{21} = 4; & a_{22} = 1; & a_{23} = -1; & a_{24} = 1; & a_{25} = -1. \\ a_{31} = 0. & a_{32} = +1; & a_{33} = +1; & a_{34} = 1; & a_{35} = -1. \\ a_{41} = 0. & a_{42} = +1; & a_{43} = -1; & a_{44} = -1; & a_{45} = +1. \\ a_{51} = 0. & a_{52} = +1; & a_{53} = -1; & a_{54} = +1; & a_{55} = -1. \end{array}$$

und folgern daraus die Moduln

$$n_1 = n_2 = 5; \quad n_3 = n_4 = n_5 = 1.$$

3) $n = 9$. Setzen wir

$a_{1\varepsilon}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$a_{2\varepsilon}$	8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$a_{3\varepsilon}$	0	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1
$a_{4\varepsilon}$	0	+1	+1	−1	−1	.	.	.	.
$a_{5\varepsilon}$	0	+1	−1	−1	+1	.	.	.	.
a_{6}	0	+1	−1	+1	−1	.	.	.	.
$a_{7\varepsilon}$	0	.	.	.	.	+1	+1	−1	−1
$a_{8\varepsilon}$	0	.	.	.	.	+1	−1	−1	+1
$a_{9\varepsilon}$	0	.	.	.	.	+1	−1	+1	−1

so ergeben sich die Moduln

$$n_1 = 9; \quad n_2 = 18; \quad n_3 = 2; \quad n_4 = n_5 = \ldots = n_9 = 1.$$

4) $n = 17$.

$$n_1 = 17; \quad n_2 = 17.4; \quad n_3 = 4; \quad n_4 = n_5 = 2; \quad n_6 = \ldots = n_{17} = 1.$$

5) Allgemein $n = 2^r + 1$.

$$n_1 = (2^r + 1); \quad n_2 = (2^r + 1)\,2^{r-2}; \quad n_3 = 2^{r-2}; \quad n_4 = n_5 = \ldots = n_{2^{r-2}+1} = 2^{r-3}$$

$$\ldots . \; n_\alpha = n_{\alpha+1} = \ldots = n_{2^r+1} = 1.$$

Die Grösse α ist zu zählen von $2^r + 2 - 3 \cdot 2^{r-2}$ bis $2^r + 1$. Ausser den Moduln $(2^r + 1)\,\tau$ und $(2^r + 1)\,2^{r-2}\,\tau$ sind nur noch solche vorhanden, die Potenzen von 2 sind, und zwar ist die höchste davon die $(r-2)^{te}$, folglich

ist die Transformation $(2^r+1)^{\text{sten}}$ Grades zu reduciren auf die vom $(2^{r-2})^{\text{ten}}$ Grade. Das neue Additionstheorem ist also weitreichender als das alte. Für die Verwandlung von Thetafunktionen mit dem Modul $(2^r+1)\,2^{r-2}\tau$ in andere mit dem zum Transformationsgrad gehörigen gelten die in II, 2 angestellten Betrachtungen.

§ 4.

Die Transformation vom Grade 2^r+2.

1) $n=6$. Wir wählen folgendes System

$a_{11}=2;\ a_{12}=2;\ a_{13}=2;\ a_{14}=2;\ a_{15}=2;\ a_{16}=2.$
$a_{21}=2;\ a_{22}=2;\ a_{23}=2;\ a_{24}=2;\ a_{25}=2;\ a_{26}=2.$
$a_{31}=2;\ a_{32}=2;\ a_{33}=-4;\ a_{34}=0;\ a_{35}=0;\ a_{36}=0.$
$a_{41}=0;\ a_{42}=0;\ a_{43}=0;\ a_{44}=2;\ a_{45}=2;\ a_{46}=4.$
$a_{51}=1;\ a_{52}=-1;\ a_{53}=0;\ a_{54}=-1;\ a_{55}=+1;\ a_{56}=0.$
$a_{61}=1;\ a_{62}=-1;\ a_{63}=0;\ a_{64}=+1;\ a_{65}=-1;\ a_{66}=0.$

Die Moduln haben danach die Werte

$$n_1=n_2\quad n_3\quad n_4\quad 6;\ n_5=n_6\quad 1.$$

2) $n=10$. Setzen wir

$a_{1\varepsilon}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$a_{2\varepsilon}$	2	2	2	2	2	−2	−2	−2	−2	−2
$a_{3\varepsilon}$	−1	−1	−1	−1	+4	0	0	0	0	0
$a_{4\varepsilon}$	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	−1	+4
$a_{5\varepsilon}$	+1	+1	−1	−1	0	0	0	0	0	0
$a_{6\varepsilon}$	+1	−1	−1	+1	0	0	0	0	0	0
$a_{7\varepsilon}$	+1	−1	+1	−1	0	0	0	0	0	0
$a_{8\varepsilon}$	0	0	0	0	0	+1	+1	−1	−1	0
$a_{9\varepsilon}$	0	0	0	0	0	+1	−1	−1	+1	0
$a_{10\varepsilon}$	0	0	0	0	0	+1	−1	+1	−1	0

so lauten die Moduln

$$n_1=n_2=10;\ n_3=n_4=5;\ n_5=n_6=\ldots=n_{10}=1.$$

Die Transformation zehnten Grades ist in einfacherer Weise als vorhin gelöst.

3) $n=18$. Wir sehen von der Aufstellung des Schemas ab, da wir das frühere benutzen mit der Aenderung, dass in den vier ersten Reihen statt der Elemente $+1$ und -1 die neuen $+2$ und -2 resp. eingeführt werden. Es resultiren dann die Moduln

$$n_1=n_2\quad n_3=n_4\quad 18;\ n_5\quad n_6=2;\ n_7\quad n_8=\ldots=n_{18}\quad 1.$$

4) $n = 34$. Auch für diesen Fall geben wir nur die Werte der Moduln an

$$n_1 = n_2 = 34;\ n_3 = n_4 = 68;\ n_5 = n_6 = \ldots = n_{10} = 4;\ n_{11} = \ldots n_{34} = 1.$$

Danach ist die Transformation 34sten Grades als vollständig gelöst zu betrachten.

5) Allgemein $n = 2^r + 2$. Das allgemeine Gesetz der Moduln ist aus den voraufgehenden speciellen Fällen leicht zu ersehen.

$$n_1 = n_2 = 2^r + 2;\ n_3 = n_4 = (2^r + 2)\,2^{r-4};\ n_5 = \ldots = n_{2^{r-2}+2} = 2^{r-3};\ \ldots$$
$$n_a = n_{a+1} = \ldots = n_{2^r+2} = 1.$$

Der Index a ist zu zählen von $a = 2^r + 3 - 3 \cdot 2^{r-2}$ bis $2^r + 2$.

Man sieht, dass die Potenzen von 2 gegen das in II, 3 gefundene Gesetz um 2 vermindert sind, dass also auch für den Fall $n = 2^r + 2$ das neue Additionstheorem erheblich weiter reicht, wie das in I. und II. behandelte. Wir haben das Resultat erhalten: Die Transformation $n = 2^r + 2$ lässt sich auf die des niederen Grades $n = 2^{r-3}$ zurückführen.

§ 5.

Bedeutung und Anwendung des dritten Additionstheoremes.

Setzt man $m_1 = m_2 = \ldots m_n = 1$ und lässt für die Zahlen $a_{\varepsilon\chi}$ die Bedingungen

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} = n$$
$$a_{\chi 1} + a_{\chi 2} + \ldots + a_{\chi n} = 0$$

bestehen, so ergeben sich neue Resultate nicht; man gelangt zu den früher entwickelten Transformationen. Nimmt man dagegen eine mannigfache Wahl der Grössen m vor, indem man Relationen aufzustellen sucht, in denen nur die Moduln τ und $n\tau$ vorkommen, wobei n eine beliebige Zahl ist, so behandelt man damit ein anderes wichtiges Problem, nämlich: Es sollen Produkte aus 2, 3 ... r Faktoren, die nur die Moduln τ und $n\tau$ enthalten, ausgedrückt werden durch Thetafunktionen, die dieselben Moduln besitzen.

1) Produkte aus 2 Faktoren. Es sei $m_1 = m_2 = 1$. Setzt man dann

$$a_{11} = \alpha;\ a_{12} = \beta$$
$$a_{21} = -\beta;\ a_{22} = \alpha$$

so resultiren die Moduln $n_1 = n_2 = \alpha^2 + \beta^2$. Für $\beta = 0$ muss demnach n eine Quadratzahl sein, für β nicht $= 0$ muss n aus einer Summe von Quadraten bestehen. Die Formel würde lauten:

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,.\,\vartheta_3(v_2,\tau) = \sum \vartheta_3 \mid g_1 \,|\, (\alpha v_1 + \beta v_2, (\alpha^2+\beta^2)\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid g_2 \,|\, (\alpha v_2 - \beta v_1, (\alpha^2+\beta^2)\tau)$$

Ist aber $m_1 = 1;\ m_2 = \delta$, so muss das Schema gelten

$$a_{11} = \sqrt{\delta};\ a_{12} = 0$$
$$a_{21} = 0;\ a_{22} = 1.$$

wenn die Moduln die Werte haben sollen: $n_1 = n_2 = \delta$. Die Grösse δ muss eine Quadratzahl sein.

$$\vartheta_3(v_1, \tau) \cdot \vartheta_3(v_2, \delta\tau) = \sum \vartheta_3 \mid g_1 \mid (\sqrt{\delta} \cdot v_1, \delta\tau) \cdot \vartheta_3 \mid g_2 \mid (v_2, \delta\tau).$$

Die Existenz derartiger Formeln war schon bekannt. Herr Professor Schröter*) stellt z. B. für die Entwickelung eines Produkts aus zwei Faktoren das Additionstheorem auf

$$\vartheta_3(t\,x + s\,r\,y, q^r) \cdot \vartheta_3(s\,x - t\,p\,y, q^p)$$
$$= \sum q^{r\mu^2} e^{2\mu i(tx+sry)} \vartheta_3\left\{(r\,s^2 + p\,t^2)\,x \quad r\,p\,t\,\mu\,w, q^{rp(s^2r+pt^2)}\right\}$$
$$\times \vartheta_3\left\{(r\,s^2 + p\,t^2)\,y - r\,s\,\mu\,w, q^{rs^2+pt^2}\right\}.$$

Die Summe ist auszudehnen über μ von 1 bis $r\,s^2 + p\,t^2 - 1$; x und y sind die Argumente, r, p, s und t beliebige Zahlen, die aber keinen gemeinsamen Teiler haben dürfen. r und p sind in unserem Falle die Moduln m_1 und m_2 und μ hat die Bedeutung von g; $w = i \log. q$. Wir sind jetzt im Stande, für gewisse allgemeine Transformationsgrade n Relationen zwischen Thetaprodukten herzustellen, in denen je zwei Thetafunktionen als Faktoren auftreten, die entweder den Modul $n\tau$ oder τ besitzen.

2) Produkte aus drei Faktoren. Dafür wählen wir das Schema:

$$a_{11} = 5;\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0.$$
$$a_{21} = 0;\ a_{22} = 4;\ a_{23} = 3.$$
$$a_{31} = 0;\ a_{32} = 3;\ a_{33} = -4.$$

und setzen $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Wir erhalten die Moduln $n_1 = n_2 = n_3 = 25$. Allgemein könnte man schreiben:

$$a_{11} = \alpha;\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0.$$
$$a_{21} = 0;\ a_{22} = \beta;\ a_{23} = \gamma.$$
$$a_{31} = 0;\ a_{32} = -\gamma;\ a_{33} = \beta.$$

Soll auf der rechten Seite $n_1 = n_2 = n_3$ werden, so muss $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ sein. Für vorstehenden Fall ist die Produktentwickelung nur in einer geringen Anzahl von Fällen anzuwenden. Setzt man dagegen

$$a_{11} = \alpha;\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0.$$
$$a_{21} = 0;\ a_{22} = \alpha;\ a_{23} = 0.$$
$$a_{31} = \alpha;\ a_{32} = 0;\ a_{33} = \alpha$$

so ist $n_1 = n_2 = n_3 = \alpha^2$, d. h. der Modul ist eine Quadratzahl. Ist auf der linken Seite $m_1 = m_2 = 1$; $m_3 = \beta$, so wäre nach dem Schema

$$a_{11} = \sqrt{\beta};\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0.$$
$$a_{21} = 0;\ a_{22} = \sqrt{\beta};\ a_{23} = 0.$$
$$a_{31} = 0;\ a_{32} = 0;\ a_{33} = 1$$

*) Habilitationsschrift. Breslau 1855.

unter der Bedingung, dass β Quadratzahl, $n_1 = n_2 = n_3 = \beta$. Die Formel lautet

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,.\,\vartheta_3(v_2,\tau)\,.\,\vartheta_3(v_3,\beta\tau)$$
$$= \sum \vartheta_3 \mid g_1 \mid (\sqrt{\beta}\, v_1,\ \beta\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid g_2 \mid (\sqrt{\beta}\,.\,v_2, \beta\tau)\,.\,\vartheta_3 \mid g_3\,(v_3,\ \beta\tau).$$

3) Produkte aus vier Faktoren. Ist $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, so nehmen die Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$ die Werte an

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha;\ a_{12} = \ \ \alpha;\ a_{13} = \ \ \alpha;\ a_{14} = \ \ \alpha \\
a_{21} &= \alpha;\ a_{22} = +\alpha;\ a_{23} = -\alpha;\ a_{24} = -\alpha \\
a_{31} &= \alpha;\ a_{32} = -\alpha;\ a_{33} = -\alpha;\ a_{34} = +\alpha \\
a_{41} &= \alpha;\ a_{42} = -\alpha;\ a_{43} = +\alpha;\ a_{44} = -\alpha.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4\alpha^2$, d. h. der Modul ist eine Quadratzahl. Dasselbe findet statt, wenn etwa $m_1 = m_2 = 1$; $m_3 = m_4 = \delta$ ist.

4) Allgemeiner Fall. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass es weiterer speciellen Untersuchungen nicht bedarf, um das allgemeine Gesetz aufzustellen. Setzt man

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$$

so sind die Moduln

$$n_1 = n_2 = \ldots\ldots = n_n = \alpha,$$

wenn α eine Quadratzahl ist. Der Beweis folgt sofort aus den beiden Bedingungen, die über die Grössen $a_{\varepsilon\varkappa}$ festgesetzt waren. Sind links β der Grössen m gleich 1, die übrigen gleich α, so ist

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_n = \alpha,$$

wenn α eine Quadratzahl ist. Der Beweis ergiebt sich ebenfalls aus den beiden eben angegebenen Bedingungen.

Es ist somit für eine Reihe von Fällen unter Zugrundelegung des letzten Additionstheorems das allgemeinere Problem gelöst: Relationen zwischen Thetafunktionen aufzustellen, die den Modul τ und den beliebigen $n\tau$ enthalten.